Clayton Suguio Hida

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA PARA CÁLCULO

editora itacaiúnas

Clayton Suguio Hida

Fundamentos de Matemática para Cálculo

1ª edição

Editora Itacaiúnas
Ananindeua – PA
2024

1ª edição

Editoração eletrônica/ diagramação: Walter Rodrigues
Projeto de capa: Editora Itacaiúnas

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD

H632 Hida, Clayton Suguio

Fundamentos de Matemática para Cálculos [recurso eletrônico] / Clayton Suguio Hida. - 1. ed. – Ananindeua : Itacaiúnas, 2024.
94p.: PDF ; 1 MB.

Inclui bibliografia e índice.
ISBN: 978-85-9535-293-3 (e-book)
DOI: 10.36599/itac-978-85-9535-293-3

1. Matemática - Estatística e Matemáticas Aplicadas. I. Título.

CDD: 510.519
CDD: 51

Índice para catálogo sistemático:
1. Matemática - Estatística e Matemáticas Aplicadas: 510.519
2. Matemática: 51

E-book publicado no formato PDF (*Portable Document Format*). Utilize software Adobe Reader para uma melhor experiência de navegabilidade nessa obra.

Esta obra foi publicada pela **Editora Itacaiúnas** em novembro de 2024.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Este material foi desenvolvido com base nas notas de aulas das disciplinas de Matemática Discreta, Matemática Aplicada ao Comércio Exterior e Fundamentos de Matemática para Cálculo, ministradas pelo autor na Faculdade de Tecnologia de São Paulo (FATEC) e na Universidade do Estado do Amapá (UEAP).

Seu principal objetivo é revisar conceitos comumente ensinados no ensino médio, preparando o aluno para enfrentar com mais facilidade a disciplina de Cálculo.

O enfoque do texto é didático, sem a pretensão de ser um tratado formal. Algumas demonstrações são apresentadas, enquanto outras são sugeridas para consulta nas referências bibliográficas indicadas. Ao longo do texto, e ao final de cada seção, exercícios são propostos, uma vez que, na opinião do autor, eles constituem a parte essencial para o pleno entendimento dos conteúdos.

Voltado para a preparação para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1, o texto aborda temas como conjuntos, números reais, equações algébricas e funções.

CAPÍTULO 1

TEORIA DOS CONJUNTOS

1.1 Conceitos Primitivos

A noção intuitiva de **conjunto** que temos é a de uma coleção de objetos (denominados de elementos), geralmente definida por alguma propriedade[1] em comum.

Podemos citar como exemplos do cotidiano:

1. Grupo da família no aplicativo de mensagem: Pai, mãe, irmão, tia, tio, avô.
2. Conjunto dos estados brasileiros: RS, SC, PR, SP. RJ, MG, ES, BA, ...
3. Os números 1,2,3,4, ...
4. Os alunos em uma sala de aula.

Uma forma de denotar um conjunto é usando chaves:

1. Grupo da família no aplicativo de mensagem:

$$F = \{\text{Pai, mãe, irmão, tia, tio, avô}\}$$

2. Conjunto dos estados brasileiros:

$$E = \{\text{AC, AL, AP, AM, BA, CE, DF, ES, ..., SP, SE, TO}\}$$

3. Os números 1,2,3,4, ...

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$$

Dado um conjunto e um elemento qualquer, a primeira coisa que podemos perguntar é se esse elemento esta ou não no conjunto. Temos assim a seguinte definição:

[1]O uso dessa noção intuitiva de conjuntos pode gerar certos problemas em teorias formais, que, no entanto, não serão abordados neste texto. Ao leitor interessado, recomendamos pesquisar sobre o Paradoxo de Russell.

Definição 1.1

Dado um conjunto A e um elemento a, dizemos que a **pertence** a A, e escrevemos $a \in A$ se a é um elemento de A. Caso contrário (ou seja, se a não pertence a A), vamos denotar por $a \notin A$

Exemplo 1. *Grupo da família no aplicativo de mensagem:*

$$F = \{Pai,\ mãe,\ irmão,\ tia,\ tio,\ avô\}$$

Temos então que:

- $Pai \in F$
- $tia \in F$
- $primo \notin F$

Exemplo 2. *Considere o conjunto dos números naturais:*

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}.$$

Temos que

1. $2345 \in \mathbb{N}$.
2. *Para qualquer número de CPF (sem pontos e traços) pertence a* $\mathbb{N}$.
3. $2.45 \notin \mathbb{N}$.
4. $SP \notin \mathbb{N}$.

Uma outra forma de representar um conjunto é através do Diagrama de Venn. Vamos demonstrar o diagrama de Venn com um exemplo:

Exemplo 3. *Considere o conjunto* $A = \{2, 5, 6, 7\}$. *Então o diagrama de Venn é apresentado na Figura 1.1:*

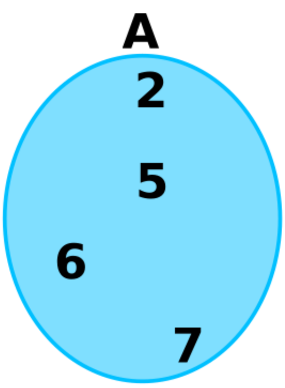


Figura 1.1: Diagrama de Venn

Algumas observações:

1. *Pensamos na área azul como delimitando todos os elementos que estão em A. Por esse motivo, os elementos de A são colocados dentro da área azul.*

2. *Não importa a ordem em que os elementos aparecem, e também não importa a forma do diagrama. Basta que fique claro a ideia contida na observação acima.*

3. *Para o caso de um conjunto, o diagrama de Venn parece não ter muita utilidade. A utilidade ficará bem mais clara quando realizarmos operações entre conjuntos.*

Definição 1.2

Um **subconjunto** B de um conjunto A é um conjunto tal que todo elemento de B é também um elemento de A.

De outro modo, dizemos que B é subconjunto de A se para todo elemento $b \in B$, temos automaticamente que $b \in A$.

Usamos a seguinte notação para indicar que B é subconjunto de A:

Notação

$$B \subset A$$

O diagrama de Venn para o caso em que $B \subset A$ é apresentada na Figura 1.2.

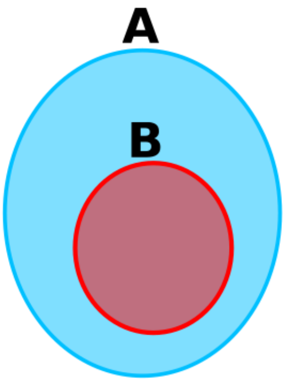


Figura 1.2: Diagrama de Venn de $B \subset A$

Exemplo 4. *Seja E o conjunto dos estados brasileiros. Assim*

- *Região-Sul é um subconjunto de E.*
- *Região-Norte é um subconjunto de E.*

Exercício 1.1

O conjunto

$$B = \{\text{SP, AM}\}$$

é subconjunto de E?

Exercício 1.2

Dado um conjunto A qualquer, é verdade que $A \subset A$? Dica: Volte a definição de subconjunto.

Exercício 1.3

Consideremos os seguintes conjuntos:

- $A = \{-1, 0, 2, 100, 200\}$.
- $S_1 = \{0\}$.
- $S_2 = \{-1, 6, 7\}$
- $S_3 = \{100, 200, 2\}$

Estudar a relação de subconjunto dos conjuntos S_1, S_2, S_3 em relação ao conjunto A e desenhar o diagrama de Venn correspondente.

Definição 1.3

Existe um conjunto especial, denominado de conjunto vazio, que é um conjunto que não possui nenhum elemento. Notação

$$\emptyset$$

A definição acima pode parecer um pouco estranha, mas o seguinte exemplo mostra a necessidade de se considerar um conjunto sem nenhum elemento:

Exemplo 5. *Considere A o conjunto de todos números naturais x tais que $x + 1 = 0$. Nesse caso temos que $A = \emptyset$, pois não existe número natural x que somada a 1 é igual a zero.*

Um fato importante é que o conjunto vazio $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto A. Caso contrário, deveria existir um elemento $x \in \emptyset$ tal que $x \notin A$. Como o conjunto $\emptyset$ não possui nenhum elemento, segue que devemos ter $\emptyset \subset A$.

Exemplo 6. *Considere o conjunto $M = \{0, 1, 2\}$. Vamos determinar todos os subconjuntos de S. Podemos começar listando todos os subconjuntos de M que possuem exatamente 1 elemento. Temos assim os subconjuntos $\{0\}, \{1\}$ e $\{2\}$. Agora, listamos todos os subconjuntos de tamanho 2. Temos portante $\{0, 1\}, \{0, 2\}$ e $\{1, 2\}$. Por fim, listamos todos os subconjuntos de tamanho 3. Nesse caso temos apenas o próprio conjunto $M = \{0, 1, 2\}$.*

Agora, lembrando que pela observação acima, o conjunto $\emptyset$ é subconjunto de todo conjunto, podemos listar todos os subconjuntos de M:

$$\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, M$$

Exercício 1.4

Considere o conjunto $M = \{1, 2, 6, 8\}$. Determinar todos os subconjuntos de M.

Definição 1.4

Dado um conjunto A, o conjunto formado por todos os subconjuntos de A é denominado de **conjunto das partes** de A e denotado por

$$\wp(A)$$

Exemplo 7. *De acordo com o Exemplo 6, temos que o conjunto das partes de* $M = \{0, 1, 2\}$ *é*

$$\wp(M) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, M\}$$

Exercício 1.5

Considere $A = \{a, b, c\}$. Determinar $\wp(A)$.

Exercício 1.6

Decidir se é verdadeiro ou falso:

1. $\{0\} \in \{0, 1, 2, 3\}$
2. $1 \notin \{1, 2, 6\}$
3. $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$
4. $a \in \{\{a\}, a, b\}$

Exercício 1.7

Seja $A = \{0, 5, 6, 7\}$. É verdade que $\{0, 7\} \in \wp(A)$?

Exercício 1.8

Verifique se verdadeiro ou falso:

1. Se $M = \{1, 0, -1, 6\}$, então $1 \in \wp(M)$.
2. Se $N = \{a, b, c, d\}$ então $\{a, b\} \in N$.
3. Se $R = \{a, 1, 2, b\}$ então $\{0, 1\} \in \wp(R)$.

Definição 1.5

Dizemos que dois conjuntos A e B são iguais e escrevemos $A = B$ se $A \subset B$ e $B \subset A$. Caso contrário, dizemos que os conjuntos são diferentes e escrevemos $A \neq B$.

Exemplo 8. *Os conjuntos* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *e* $B = \{3, 2, 1, 5, 4\}$ *são iguais?*

Observe que todo elemento que esta no conjunto A*, também esta no conjunto* B*. Logo* $A \subset B$*. Também é verdade que todo elemento que esta no conjunto* B *também esta no conjunto* A*. Logo* $B \subset A$*. Segue da nossa definição que* $A = B$*.*

Esse exemplo ilustra o fato de que para conjuntos, a ordem dos elementos não importa. Assim, por exemplo, temos as seguintes igualdades:

$$\{1,2,3,4,5\} = \{3,2,1,5,4\} = \{1,2,3,5,4\} = \cdots$$

Observe também que pela definição de igualdade, o conjunto $C = \{1,1,2,2,2,3,3,3,4,4,5,5\}$ *também é igual ao conjunto* A *(Verifique!!).*

Nesse último caso, vamos manter a convenção de escrever os elementos do conjunto de forma única, evitando repetições.

1.1.1 Exercícios

1. Verdadeiro ou falso?

   (a) Se $A \neq B$ e $B \neq C$ então $A \neq C$.

   (b) Se $A \subset B$ e $B \not\subset C$ então $A \not\subset C$.

   (c) Se $A \subset B$ e $a \in A$, então $a \in B$.

2. Pode existir algum conjunto A tal que $\wp(A)$ seja o conjunto vazio?

3. Verifique se verdadeiro ou falso:

   (a) $3 = \{3\}$

   (b) $0 \in \emptyset$

   (c) $3 \in \{3\}$

   (d) $0 = \emptyset$

   (e) $5 \in \{\{5\}\}$

   (f) $4 \in \{\{4\}, 4\}$

   (g) $3 \subset \{3\}$

   (h) $\emptyset \in \{3\}$

4. Determine x para que $\{1,2,4\} = \{2,4,x\}$.

5. Sejam x e y números tais que os conjuntos $\{0,7,1\}$ e $\{x,y,1\}$ são iguais. Então, podemos afirmar que:

   (a) $x = 0$ e $y = 5$.

   (b) $x + y = 7$.

   (c) $x = 0$ e $y = 1$.

   (d) $x + 2y = 7$.

   (e) $x = y$.

1.2 Operações com Conjuntos

Na seção anterior, estudamos a noção intuitiva de conjuntos e as relações entre elementos e conjuntos. Nessa seção, vamos trabalhar com operações entre conjuntos. A ideia é construir novos conjuntos a partir de outros.

Vamos começar com a união entre dois conjuntos:

Definição 1.6

Dados dois conjuntos A e B, definimos a **união** de A com B (denotado por $A \cup B$) como o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A ou a B.

Uma observação importante em relação a palavra "ou"usada na definição acima. Se trata do "ou" inclusivo, ou seja, esta incluso o caso em que o elemento pertence a ambos os conjuntos. Poderíamos expressar a união do seguinte modo: A união de dois conjuntos A e B é o conjunto $A \cup B$ formada por todos os elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A ou B.

O seguinte exemplo ajuda a esclarecer a definição:

Exemplo 9. *Considere* $A = \{1, 3, 4, 5, 7, 8\}$ *e* $B = \{-1, 4, 7, 10, 15\}$. *Temos então que*

$$A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 7, 8, -1, 10, 15\}.$$

Observe que 4 *e* 7 *são elementos que pertencem a* A *e a* B*, logo também estão na união.*

O Diagrama de Venn que representa a união de conjuntos é apresentada na Figura 1.3.

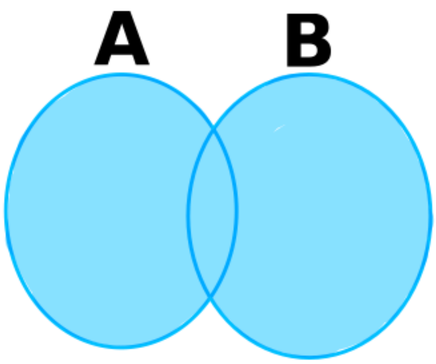


Figura 1.3: Diagrama de Venn de $A \cup B$

De forma indutiva, podemos realizar a união de vários conjuntos. Observe no exemplo abaixo a definição da união de três conjuntos:

Exemplo 10 (União de vários conjuntos)**.** *Podemos fazer a união de vários subconjuntos.*

$$A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Exercício 1.9

Considere $A = \{1, 0, 2, 3\}$, $B = \{1, -1, 3, 4\}$ e $C = \{6, 7, 1, 0\}$. Determinar $A \cup B \cup C$.

Definição 1.7

Dados dois conjuntos A e B, definimos a **intersecção** de A com B (denotado por $A \cap B$) como o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A e a B simultaneamente.

O diagrama de Venn para a intersecção é apresentada na Figura 1.4.

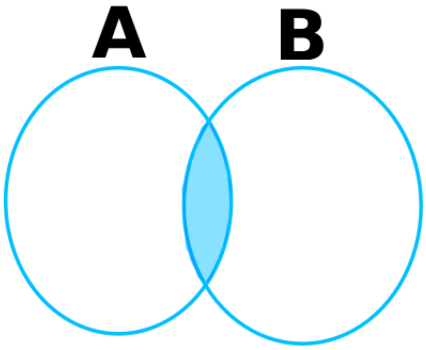


Figura 1.4: Diagrama de Venn de $A \cap B$

Exemplo 11. *Considere P o conjunto formado por todos os países tendo como idioma oficial o português e A o conjunto formado por todos os países da América do Sul. Brasil é o único país da América do Sul que tem o português como idioma oficial. Assim $P \cap A = \{Brasil\}$.*

Exercício 1.10

Considere $A = \{3, 4, 5\}$ e $B = \{4, 5, 7\}$. Determinar $A \cap B$.

Exemplo 12. *Considere E o conjunto formado pelos nomes dos estados brasileiros e C o conjunto formado por todos os nomes de capitais dos estados brasileiros. Então $E \cap C = \{$São Paulo, Rio de Janeiro$\}$.*

Exercício 1.11

Dizemos que um número natural p é **primo** se os únicos divisores de p são o 1 e o próprio p. Considere P o conjunto formado por todos os números pares e $\mathbb{P}$ o conjunto formado por todos os números primos. Determine $P \cap \mathbb{P}$.

Definição 1.8

Dados dois conjuntos A e B, definimos a **diferença** de A e B (denotado por $A \setminus B$) como o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A e não pertencem a B.

Exemplo 13. *Considere $A = \{c, d, p, q\}$ e $B = \{d, q, t\}$. Então $A \setminus B = \{c, p\}$.*

O Diagrama de Venn para a diferença $A \setminus B$ esta apresentada na Figura 1.5:

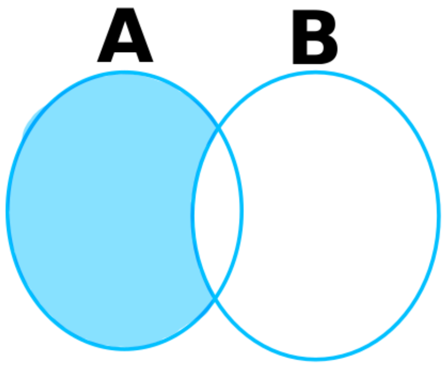


Figura 1.5: Diagrama de Venn de $A \setminus B$

Exercício 1.12

Considere A e B conjuntos. Mostre que

1. $A \cup B = B \cup A$.

2. $A \cap B = B \cap A$.

3. Encontre dois conjuntos A e B tal que $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Dizemos que as operações de união e intersecção de conjuntos são comutativas, ou seja, a ordem dos conjuntos não altera o resultado da operação. Já a operação de diferença não é comutativa.

Vamos encerrar a seção com a operação produto cartesiano:

Definição 1.9

Considere dois conjuntos A e B.

1. se $x \in A$ e $y \in B$, denotamos por (x, y) o par ordenado (primeiro x, segundo y), ou x na primeira coordenada e y na segunda coordenada.

2. O conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y), para $x \in A$ e $y \in B$ é denominado de produto cartesiano de A e B. Notação $A \times B$.

Assim
$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Exemplo 14. *Seja* $A = \{1, 4\}$ *e* $B = \{2, 1, 0\}$. *Determine* $A \times B$

1.2.1 Exercícios

1. Considere $A = \{a, b, e, f\}$ e $B = \{a, b, r, f, z\}$. Determinar $A \cup B$.

2. Considere $C = A \cup B$, onde $A = \{1, 3, 7, 9\}$ e $B = \{2, 7, 8, 9\}$.

   Determine se é verdadeiro ou falso:

   (a) $-1 \in C$.

(b) $7 \in C$.

(c) $\{1, 8\} \subset C$.

3. Defina a operação de intersecção $A \cap B$ de dois conjuntos.

4. Considere $A = \{a, b, c, f, g, t, h\}$ e $B = \{c, 1, 0, 8, z, h\}$. Determine $A \cap B$.

5. Represente no diagrama de Venn a operação de intersecção de conjuntos.

6. Considere $A = \{1, 5, 8, 9\}$, $B = \{20, 50\}$ e $C = \{5, 50\}$. Encontre

    (a) $(A \cup B) \cap C$.

    (b) $A \cap (B \cup C)$.

7. Considere os conjuntos A, B e C. Representar no diagrama de Venn:

    (a) $A \cup B$.

    (b) $A \setminus C$.

    (c) $A \cup B \cup C$.

    (d) $A \cap C$.

    (e) $A \cap B \cap C$.

    (f) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

8. Considere $A = \{1, 3, 4, 8\}$, $B = \{-1, 7, 3, 8\}$ e $C = \{0, 1, 2, 9\}$. Determine $(A \cup B) \cap (A \setminus C)$.

9. Sendo $A = \{0, 2, 4, 6\}$ e $B = \{2, 4, 7, 8, 9, 10\}$, classifique como verdadeiro ou falso as seguintes afirmações:

    (a) $A \setminus B = \{0, 2, 6, -7, -8, -9, -10\}$

    (b) $A \setminus B = \{0, 6\}$

    (c) $B \setminus A = \{7, 8, 9, 10\}$

    (d) $B \setminus A = \{-6, 0, 7, 8, 9, 10\}$

10. (PUC-Rio-2009) Em um colégio, de 100 alunos, 80 gostam de sorvete de chocolate, 70 gostam de sorvete de creme e 60 gostam dos dois sabores. Quantos alunos não gostam de nenhum dos dois sabores?

11. (PUC) Numa pesquisa de mercado, verificou-se que 15 pessoas utilizam pelo menos um dos produtos A ou B. Sabendo que 10 dessas pessoas não usam o produto B e que 2 dessas pessoas não usam o produto A, qual é o número de pessoas que utilizam os produtos A e B?

12. Considere $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{2, -6, 7\}$. Determine $A \times B$.

13. Verifique se verdadeiro ou falso: Para todos conjuntos A e B:

    (a) $A \subset A \times B$.

(b) $\emptyset \subset A \times B$.

(c) Se $C \subset B$ então $A \times C \subset A \times B$.

(d) $(A \cap B) \times B \subset A \times B$.

(e) $A \times B \neq B \times A$.

14. Se A é um conjunto tal que $n(A \times A) = 9$ e sabendo que $(2,4), (4,5) \in A \times A$, determine $A \times A$.

15. Suponha que $(2x + 3, 4)$ e $(-1, y - 2)$ são iguais. Determine x e y.

16. Defina o produto cartesiano de três conjuntos A, B e C.

17. Determine o produto cartesiano de $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2, 4\}$ e $C = \{9, 8\}$.

18. Forneça um exemplo do cotidiano onde a noção de produto cartesiano é usada.

19. Dados $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$, determinar:

(a) $A \times A$.

(b) $(A \times A) \times (B \times B)$.

(c) $(A \cap U) \times (B \setminus A)$.

(d) $\emptyset \times A$.

20. Sejam A, B e C conjuntos contidos no conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, tais que A é o conjunto dos números menores do que 250, B é o conjunto dos números múltiplos de 4 e C é o conjunto dos números pares. Denotando por $A^C = \mathbb{N} \setminus A$, $B^C = \mathbb{N} \setminus B$ e $C^C = \mathbb{N} \setminus C$, o número 33 pertence a:

(a) $(A^C \cup B) \cap C^C$

(b) $A^C \cap B^C \cap C^C$

(c) $(A \cap B) \cup (A^C \cap C^C)$

(d) $(A^C \cap B^C) \cup (B^C \cap C^C)$

(e) $(A \cup B^C) \cap C$

1.3 Conjuntos Numéricos

Nesta seção, vamos estudar alguns conjuntos numéricos e suas respectivas operações algébricas. Vamos iniciar com o estudo dos números naturais.

Sempre usamos os números naturais na hora de fazer algum tipo de contagem. Por exemplo, contando quantas cadeiras possui uma sala, ou quantos carros podemos estacionar na garagem.

Nestes exemplos, chegamos a números da forma $1, 2, 3, \ldots, 100, \ldots$. Esses elementos formam o conjunto dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 100, 101, \ldots\}.$$

Exemplo 15.

1. $2345 \in \mathbb{N}$.

2. *Para qualquer número de CPF (sem pontos e traços) pertence a* $\mathbb{N}$.

3. *O seu número RA pertence a* $\mathbb{N}$.

Exercício 1.13

Verifique se verdadeiro ou falso:

1. Todo número de RG (sem pontos e traços) é um número natural.

2. O conjunto dos números pares positivos é um subconjunto dos números naturais.

3. Para todo número natural, existe outro que é maior.

4. Para todo número natural, existe outro que é menor.

Podemos realizar operações de adição e multiplicação de números naturais, com essas operações retornando números naturais.

Exemplo 16.

1. $2 + 5 = 7$

2. $4 \times 3 = 12$.

As operações de adição e multiplicação entre dois números naturais resulta sempre um número natural. Agora a subtração de números naturais nem sempre é um número natural.

Um exemplo prático: Suponha que você possua R$ 100,00 na sua conta bancária. Você efetuou um pagamento no cartão no valor de R$ 110,00. Assim, você ficou com saldo negativo de R$ 10,00, que geralmente aparece em seu extrato na forma -R$ 10,00.

Exercício 1.14

Complete o seguinte extrato bancário:

Extrato		
Movimentação	Valor	Saldo
Depósito	250	250
Saque	200	50
Saque	100	-50
Saque	100	
Depósito	50	
Saldo final		

Para efetuar operações de subtração, vamos introduzir números adicionais, que são os números naturais com o sinal negativo. Esse novo conjunto numérico, denominado de conjuntos dos números inteiros, e denotado por $\mathbb{Z}$, é formado pelo conjunto dos números naturais mais as contrapartes negativas dos números naturais, ou seja,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Podemos pensar no conjunto dos números inteiros como sendo uma extensão do conjunto dos números naturais que permita a operação de subtração. Segue da nossa definição que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

Agora podemos realizar operações de adição, subtração e multiplicação de números inteiros, sem "sair" do conjunto dos números inteiros.

Exemplo 17.

1. $4 + 5 = 9$ *(Adição de números naturais).*

2. $4 - 5 = -1$

3. $-4 + 3 = -1$

No caso da multiplicação, devemos lembrar a regra dos sinais:

1. $2 \times 5 = 10$ (Multiplicação de números naturais).

2. $4 \times (-2) = -8$ (Regra de sinais: $+- = -$).

3. $-3 \times 4 = -12$ (Regra de sinais: $-+ = -$).

4. $(-4) \times (-2) = +8$ (Regra de sinais: $-- = +$).

Exemplo 18. *Uma explicação sobre a regra $-- = +$. Para todo número inteiro x, temos que $x - x = 0$. Assim, por exemplo, se $x = -4$, substituindo na equação anterior, devemos ter igualdade. Assim*

$$-4 - (-4) = 0.$$

Como também temos que $-4 + 4 = 0$, então devemos ter $- - 4 = 4$. O mesmo argumento é valido para todo inteiro.

Para o exercício seguinte, colocamos como prioridade a multiplicação e depois a adição/subtração.

Exercício 1.15

Resolva as seguintes expressões:

1. $3 \times 2 + 1$

2. -3×6

3. -2×-4

4. $-9 \times 10 - 4 \times (-3)$

Para completar nosso conjunto de operações que realizamos diariamente, esta faltando a divisão de números. Nesse caso, observamos que se tomarmos os inteiros 4 e 2, então a divisão de 4 por 2 resulta em 2, que também é um inteiro. No entanto, se tomarmos os números 1 e 3, vemos que a divisão de 1 por 3 não retorna um inteiro. Nesse caso, teremos novamente que estender nosso universo de números. Nosso próximo conjunto é o conjunto dos números racionais:

$$\mathbb{Q} := \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$

A expressão da forma $\frac{a}{b}$ é denominada de fração. O número a é chamado de numerador, enquanto o número b é o denominador. Assim, $\mathbb{Q}$ é formado por todas as frações onde o numerador e o denominador são números inteiros, com o denominador sempre diferente de zero. Observe que para todo número inteiro a, temos que $a = \frac{a}{1}$. Assim, todo número inteiro é também um número racional. Logo

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

No conjunto dos números racionais, podemos realizar operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, sem a necessidade de novos números. Vamos relembrar essas operações para os números racionais. Começamos com as operações de adição e subtração.

Para realizar a adição/subtração de frações com o mesmo denominador, basta realizar a operação correspondente nos numeradores:

Exemplo 19.

1. $\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{2+5}{3} = \frac{7}{3}$

2. $\frac{-2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{-2+1}{4} = \frac{-1}{4}$

Exercício 1.16

Resolva as seguintes expressões:

1. $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}$.

2. $-\frac{1}{5} + \frac{4}{5}$.

3. $\frac{-2}{4} + \frac{1}{4} - \frac{7}{4}$.

No caso em que a operação de adição/subtração envolve denominadores distintos, devemos recorrer ao caso anterior. Primeiramente, observe que uma fração pode ser escrita de diferentes formas. Por exemplo:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \cdots$$

Dizemos que cada uma das frações acima são equivalentes: Se você realizar a operação de divisão em uma calculadora, o resultado será sempre o mesmo, no caso igual a 0.5.

Assim, dada uma soma de frações com denominadores distintos, podemos “trocar” cada fração por uma fração equivalente de tal forma que fiquem com os mesmos denominadores.

Observe o seguinte exemplo:

Exemplo 20. *Vamos realizar a seguinte operação:* $\frac{1}{2} + \frac{4}{3}$. *Observe que os denominadores são distintos, assim não podemos aplicar diretamente a operação de adição nos numeradores.*

Observe no entanto que $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ *e que* $\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$. *Assim*

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{3} = \frac{3}{6} + \frac{8}{6}.$$

Observe agora que a última adição envolve denominadores iguais, assim podemos concluir que

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{3} = \frac{3}{6} + \frac{8}{6} = \frac{11}{6}.$$

Concluímos então que $\frac{1}{2} + \frac{4}{3} = \frac{11}{6}$.

O exemplo anterior fornece um meio de realizar operação de adição/subtração com frações de denominadores distintos. Para tanto, consideramos frações equivalentes com denominadores iguais. Um meio de conseguir frações equivalentes com denominadores iguais é pelo método do mínimo múltiplo comum.

Lembramos que o mínimo múltiplo comum (mmc) entre números naturais é o menor número que é múltiplo simultâneo desses números.

Exemplo 21. *Observando os múltiplos inteiros de* 2 *e* 3, *temos respectivamente*

Múltiplos de 2: $0, 2, 4, 6, 8, 10, ..$

Múltiplos de 3: $0, 3, 6, 9, 12, ...$

Observe que o menor número maior que zero que esta nas duas listas é o número 6. Assim, o menor múltiplo comum entre 2 e 3 é o número 6. Denotamos o menor múltiplo comum entre 2 e 3 por

$$mmc(2, 3) = 6.$$

Exemplo 22. *Vamos usar um método para encontrar o mmc de dois números. Vamos usar como exemplo os números 3 e 4. O método é demonstrado a seguir:*

Primeiramente, construímos a seguinte tabela:

$$\begin{array}{cc|c|c}
3 & 4 & & \\
 & & & \\
 & & & \\
 & & & \\
\end{array}$$

Observe que temos apenas os números 3 e 4, que são os números que gostaríamos de encontrar o mmc. Agora, obtemos o primeiro número primo que divide pelo menos um dos números. Nesse caso, observamos que o número 2 é primo e divide 4. Assim, escrevemos 2 na ultima coluna da primeira linha, e na segunda linha, inserimos o valor da divisão de 4 por 2, enquanto apenas reescrevemos o número 3.

$$\begin{array}{cc|c|}
3 & 4 & 2 \\
3 & 2 & \\
 & & \\
 & &
\end{array}$$

Novamente, o número primo 2 ainda divide um dos números, no caso o próprio 2. Assim, repetimos o passo anterior para a segunda linha:

$$\begin{array}{cc|c|}
3 & 4 & 2 \\
3 & 2 & 2 \\
3 & 1 & \\
 & &
\end{array}$$

Agora o número primo não divide nenhum elemento da última linha. Passamos ao próximo primo que é o número 3. Assim, chegamos a tabela seguinte:

$$\begin{array}{cc|c|}
3 & 4 & 2 \\
3 & 2 & 2 \\
3 & 1 & 3 \\
1 & 1 &
\end{array}$$

Quando chegamos a uma linha com todos os números iguais a 1, significa que encerramos o processo. Para encontrar o $mmc(3,4)$*, basta multiplicar todos os números da última coluna. Nesse caso*

$$mmc(3,4) = 2 \times 2 \times 3 = 12.$$

Exercício 1.17

Encontrar os seguintes mmc:

1. $mmc(2,4)$.
2. $mmc(5,7)$.
3. $mmc(2,3)$.
4. $mmc(2,3,5)$ (Procedimento análogo ao caso com dois números. Nesse caso, basta adicionar mais uma coluna com o terceiro número).

Voltando ao nosso problema de realizar adição/subtração com frações de numerados distintos, devemos realizar as seguintes operações:

- Encontramos o mmc entre os números que aparecem nos denominadores.
- Trocamos cada fração, pela fração equivalente com o denominador igual ao mmc.
- Realizamos as operações como no caso de denominadores iguais.

Exemplo 23. *Vamos realizar a seguinte operação* $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$*. Temos que* $mmc(3,4) = 12$*. Vamos trocar cada fração por uma fração equivalente e com denominador igual a 12.*

Começamos com a fração $\frac{2}{3}$. Observe que para tornar o denominador dessa fração igual a 12, devemos multiplicar o denominador por 4 (observe que esse é o resultado da divisão de 12 por 3). Assim, multiplicando o numerador e o denominador por 4 temos que

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}.$$

Observe que ao multiplicar o numerador e o denominador pelo menos número (no caso o 4), não alteramos o valor da fração, ou seja, obtemos uma fração equivalente.

Procedendo de maneira análoga para a fração $\frac{1}{4}$, vamos obter que $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$. Assim

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8}{12} - \frac{3}{12} = \frac{8-3}{12} = \frac{5}{12}$$

Exercício 1.18

Calcule:

1. $\frac{1}{2} + \frac{3}{8}$.
2. $\frac{5}{6} + \frac{1}{7}$.
3. $-\frac{1}{3} - \frac{2}{9}$.
4. $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{7}$.
5. $\frac{4}{5} + 2$. (Lembre que $2 = \frac{2}{1}$).

Para concluir as operações no conjuntos dos números racionais, devemos lembrar como realizar as operações de multiplicação e divisão. No entanto, essas operações são mais naturais do que a operação de adição. Vejamos:

No caso da multiplicação de frações, basta multiplicar os numeradores e dividir pela multiplicação dos denominadores:

$$\frac{p}{q} \times \frac{r}{s} = \frac{p \times r}{q \times s}$$

Exemplo 24.

$$\frac{2}{5} \times \frac{-4}{2} = \frac{2 \times -4}{5 \times 2} = \frac{-8}{10}$$

Um comentário sobre o sinal em frações. Usando a mesma regra de sinais para os inteiros, temos que $\frac{-1}{3} = \frac{1}{-3}$. Assim, escrevemos $-\frac{1}{3}$ para representar $\frac{-1}{3}$ ou $\frac{1}{-3}$.

Exercício 1.19

Calcule

1. $\frac{2}{5} \times \frac{-2}{6}$.
2. $\frac{-3}{4} \times \frac{8}{9}$.

No caso da divisão, observamos que $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$, ou seja, para dividir a por b, na verdade realizamos a multiplicação de a pelo inverso de $b = \frac{b}{1}$, ou seja, $\frac{1}{b}$. Assim, temos que

$$\frac{p}{q} \div \frac{m}{n} = \frac{p}{q} \times \frac{n}{m}$$

De modo simplificado, para dividir a fração $\frac{p}{q}$ pela fração $\frac{m}{n}$, realizamos a multiplicação da fração $\frac{p}{q}$ pela fração $\frac{n}{m}$.

Exemplo 25. *Vamos calcular a divisão $\frac{3}{5} \div \frac{2}{7}$. Usando a definição acima, temos que*

$$\frac{3}{5} \div \frac{2}{7} = \frac{3}{5} \times \frac{7}{2} = \frac{21}{10}.$$

Logo $\frac{3}{5} \div \frac{2}{7} = \frac{21}{10}$.

Exercício 1.20

Calcule

1. $\frac{1}{5} \div \frac{3}{7}$.
2. $\frac{7}{3} \div \frac{-2}{9}$.

Para concluir o estudo sobre os números racionais, vamos estudar as frações reduzidas: Dizemos que uma fração $\frac{p}{q}$ esta em sua forma reduzida se p e q são primos entre si, ou seja, não existe um número inteiro positivo diferente de 1 que divide p e q. Por exemplo, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{4}$ são frações reduzidas, enquanto $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{9}{21}$ não estão na forma reduzida.

Para obter a fração reduzida de uma fração, basta realizar sucessivas divisões no numerador e no denominador até o ponto onde não for mais possível.

Exemplo 26. *Vamos obter a fração reduzida de $\frac{12}{36}$. Para isso, observamos que o numerador e o denominador são divisíveis por 2. Logo*

$$\frac{12}{36} = \frac{6 \times 2}{18 \times 2} = \frac{6}{18}.$$

Assim, obtemos a fração $\frac{6}{18}$, que novamente possui numerador e denominador divisíveis por 2. Logo ainda não esta na forma reduzida. Realizando o processo de divisão por 2 mais uma vez, teremos que $\frac{6}{18} = \frac{3}{9}$. Agora, a fração $\frac{3}{9}$ tem numerador e denominador divisível por 3. Assim $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. Observe agora que $\frac{1}{3}$ possui numerador e denominador que são primos entre si. Logo é uma fração reduzida. Temos assim que

$$\frac{12}{36} = \frac{6}{18} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Logo, $\frac{1}{3}$ é a fração reduzida da fração $\frac{12}{36}$.

No processo de redução de frações, podemos começar a divisão do numerador e denominador por valores altos. Nesse exemplo, poderíamos ter começado a divisão com o número 12. Isso elimina alguns passos intermediários. No entanto, em muitos casos, não fica claro um valor alto para começar a divisão. Assim, recomenda-se nesses casos começar com números pequenos, iniciando-se no número 2.

Exercício 1.21

Para os alunos com conhecimento em programação. Realizar em pseudo-código um algoritmo que recebe dois valores inteiros p e q, e retorna dois valores m e n, onde $\frac{m}{n}$ é a fração reduzida da fração $\frac{p}{q}$.

Concluímos a seção com o conjunto dos números irracionais. Trabalhamos até o momento com os números racionais, que são as frações do tipo $\frac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$.

Se executarmos a operação de divisão, chegamos na representação decimal de $\frac{a}{b}$. Nesse caso, chegamos sempre a um dos seguintes casos:

1. Uma dizima finita (Ex: $\frac{1}{2} = 0.5$).

2. Uma dizima infinita, mas periódica ($\frac{1}{3} = 0.333333\cdots = 0.\overline{3}$).

E os números que possuem dizimas infinitas e não periódicas?

Por exemplo,

$$1,01001000100001000001000000100000001.....$$

Observamos que existe um padrão de formação do número acima, mas não é finita e nem periódica. Esse número é um exemplo de um número irracional. Outros números irracionais importantes são o número pi $\pi = 3.14159265359\cdots$, o número de Euler $e = 2.7182.$ e o número $\sqrt{2}$.

Os números com dizimas infinitas e não periódicas formam os conjuntos dos números irracionais e a união dos racionais com os números irracionais denominamos de conjunto dos números reais, e denotamos por $\mathbb{R}$. Na próxima seção, vamos estudar de forma um pouco mais detalhada o conjunto dos números reais.

1.3.1 Exercícios

1. Resolva as seguintes expressões:

   (a) $3 \times 2 + 1$

   (b) $-2 \times (-3) + 2$

   (c) -3×6

   (d) -2×-4

   (e) $(-9 \times 10) - (4 \times (-3))$

   (f) $2 \times 3 - 5$

   (g) $4 \times 4 - 20 \times (-2)$

2. Resolva as seguintes expressões:

   (a) $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}$

   (b) $-\frac{1}{5} + \frac{4}{5}$

   (c) $\frac{5}{6} + \frac{7}{6} - \frac{2}{6}$

(d) $\frac{-2}{4} + \frac{1}{4} - \frac{7}{4}$

(e) $\frac{2}{5} - \frac{3}{5}$

3. Calcule:

(a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

(b) $\frac{3}{4} + \frac{2}{5}$

(c) $\frac{5}{6} + \frac{1}{6}$

(d) $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$

(e) $\frac{7}{8} + \frac{3}{8}$

(f) $\frac{4}{5} - \frac{1}{10}$

(g) $\frac{2}{7} - \frac{5}{14}$

(h) $\frac{3}{5} + \frac{4}{3}$

(i) $-\frac{9}{10} + \frac{2}{6}$

(j) $-\frac{5}{9} + \frac{1}{9}$

(k) $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{4}$

(l) $\frac{4}{5} - \frac{1}{3} + 1$

4. Calcule:

(a) $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$

(b) $\frac{-5}{6} \times \frac{-2}{4}$

(c) $-\frac{1}{8} \div \frac{2}{5}$

(d) $\frac{9}{2} \div \frac{5}{3}$

1.4 Conjunto dos Números Reais

1.4.1 Conjunto Ordenado

Podemos pensar no conjunto dos números reais como uma reta, que não possui começo e nem fim.

Primeiramente, vamos imaginar o conjuntos dos números inteiros $\mathbb{Z}$ dispostos da maneira apresentada na Figura 1.6.

Figura 1.6: Conjunto dos Números Inteiros

O ponto vermelho representa o número 0. O próximo ponto a direita do zero, é o número 1, depois o número 2 e assim sucessivamente. Do lado esquerdo do número 0, temos os números negativos -1, -2, -3 ...

Agora, vamos inserir os números racionais. Por exemplo, sabemos que a fração $\frac{1}{2}$ é um número racional, que esta entre 0 e 1. Vamos coloca-lo em nosso desenho (o ponto azul) na Figura 1.7.

Figura 1.7: Conjunto dos Números Racionais

De forma análoga, colocando todos os racionais, teremos um desenho parecido[2] com a Figura 1.8.

Figura 1.8: Conjunto dos Números Racionais

Para que o desenho acima se torne uma reta, precisamos preencher aqueles pequenos espaços em brancos. Esses novos elementos são chamados de números irracionais.

Por exemplo, o número $\sqrt{2}$ é um número irracional. Ele esta entre o número 1 e o número 2. O valor $\sqrt{2}$ é igual a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos iguais a 1 (ver Figura 1.9).

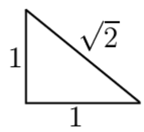


Figura 1.9: O Número $\sqrt{2}$

Outro exemplo importante de número irracional é o número conhecido como $\pi = 3.1415...$

A união entre o conjuntos dos racionais e dos números irracionais forma o conjunto dos números reais. Denotamos o conjunto dos números reais por $\mathbb{R}$.

Com a inclusão dos números irracionais em nosso desenho, agora temos uma reta (Figura 1.10), que representa o conjuntos dos números reais $\mathbb{R}$.

Figura 1.10: O Conjunto dos Números Reais

Observamos ainda que, podemos orientar nossa reta da esquerda para a direita. Assim dados dois números nessa reta, representados pelos pontos verde e azul na Figura 1.11, podemos dizer que o ponto verde é menor que o azul, pois o azul esta a direita do verde.

Figura 1.11: O Conjunto dos Números Reais

Definimos assim uma ordem sobre o conjuntos dos números reais. Dados dois pontos x e y, denotamos por $x \leq y$ o fato de x ser menor que y, ou seja, que y esta a direita de x.

[2] Formalmente, o desenho seria diferente, devido a densidade dos racionais. Ver Capítulo 2 de [8]

O conceito de ordem nos números reais nos permite definir os seguintes subconjuntos:

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, denotamos por $[a, b]$ o subconjuntos dos números reais formados por todos os elementos que estão entre a e b, incluindo também os elementos a e b. Escrevemos esse conjunto da seguinte forma:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

Podemos pensar em $[a, b]$ como o segmento de reta que vai de a até b, representada na Figura 1.12.

Figura 1.12: Intervalo $[a, b]$

Em algumas situações, queremos o segmente de reta que vai de a até b, mas excluindo um ou os dois extremos, ou seja, excluindo umas das extremidades.

Nestes casos, temos os seguintes conjuntos representados na Figura 1.13.

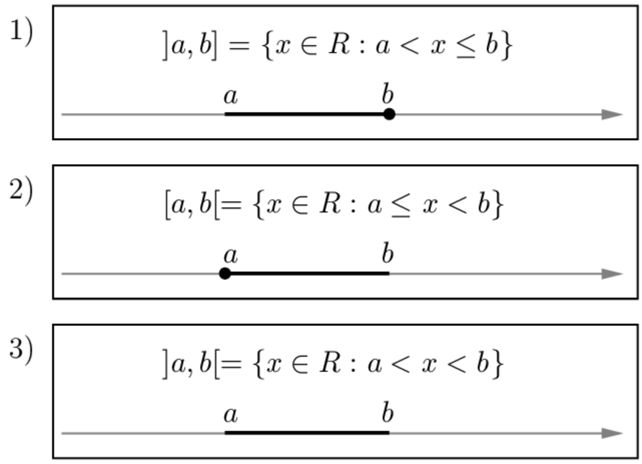


Figura 1.13: Intervalos da Reta Real

Em 1), temos o segmento de reta que vai de a até b, menos o ponto inicial a.

Em 2), temos o segmento de reta que vai de a até b, menos o ponto final b.

Finalmente, em 3), temos o segmento de reta que vai de a até b, menos o ponto inicial a e o ponto final b.

Os subconjuntos descritos acima são denominados de intervalos.

Exemplo 27. *Considere o intervalo* $I = [2, 7[$. *Então* I *representa o subconjunto dos números reais que são maiores ou iguais a* 2 *e que são estritamente menores que* 7.

Por exemplo, 3.5 *é um elemento de* I. *De fato* 3.5 *é maior ou igual que* 2 *e também,* 3.5 *é estritamente menor que* 7.

Exemplo 28.

1. $[1, 5]$ - *Todos os números reais que são* ***maiores ou iguais*** *a 1 e* ***menores ou iguais*** *a 5.*

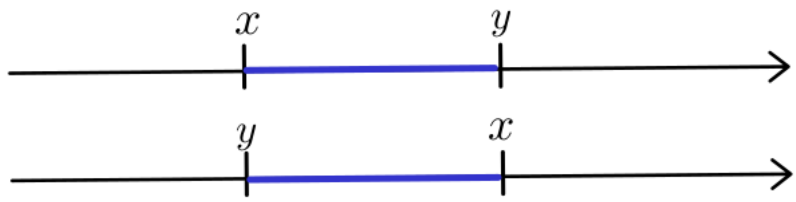


Figura 1.14: Distância de x a y

2. $]2,7[$ - *Todos os números reais que são* ***maiores*** *que 2 e* ***menores*** *que 7.*

3. $[2,7[$ - *Todos os números reais que são* ***maiores ou iguais*** *a 2 e* ***menores*** *que 7.*

4. $]2,7]$ - *Todos os números reais que são* ***maiores*** *que 2 e* ***menores ou iguais*** *a 7.*

Exercício 1.22

Verifique se verdadeiro ou falso:

1. O número 3 esta no intervalo $(3,5)$.
2. O número 2.3 não esta no intervalo $(2,5]$.
3. O número 1.8888 esta no intervalo $(0,1)$.
4. O número -2 esta no intervalo $[-5,-1]$.
5. $-4 \in [0,5]$.

Vamos concluir essa seção com a operação de módulo de um número real:

Definição 1.10

Seja x um número real. Definimos o módulo de x, denotado por $|x|$, da seguinte forma

$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$$

Exemplo 29.

1. $|2| = 2$.

2. $|-4| = -(-4) = 4$.

3. $|0| = 0$.

De uma forma simplificada, o módulo de um número real é o próprio número se for positivo, e nos casos de números negativos, 'esquecemos' o sinal negativo.

Podemos pensar também no módulo de um número real como sendo a distância do número em relação ao número 0. De um modo mais geral, dados dois números x e y, o valor $|x-y|$ representa a distância entre x e y, como mostrado na Figura 1.14.

A seguinte proposição fornece algumas propriedades da operação módulo:

Proposição 30. *Para todos números reais $x, y \in \mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades:*

1. $|x| \geq 0$.
2. $|x| = |-x|$.
3. $|xy| = |x||y|$.
4. $|x-y| = |y-x|$.
5. $|x+y| \leq |x| + |y|$.

Vamos explorar mais as propriedades de módulos nas seções seguintes sobre inequações.

1.4.2 Exercícios

1. Determine ser verdadeiro ou falso:
   (a) $2 \in [-1, 2)$.
   (b) $-5 \in [-9, -8]$.
   (c) $7 \in (7, 8]$.
   (d) O intervalo $[1, 2]$ possui apenas 2 números: 1 e 2.
   (e) O intervalo $(1, 1)$ é vazio.
2. Calcule:
   (a) $|3-5|$
   (b) $-|5-7|$
   (c) Mostre que $|x|^2 = x^2$.
   (d) Forneça um exemplo de número real x tal que $|x|^3 \neq x^3$.

1.4.3 *Conjunto Completo

Nesta seção vamos estudar a noção de completude dos números reais. Essa seção pode ser omitida em uma primeira leitura.

Vamos começar discutindo um exemplo. Considere o intervalo

$$I = [3, 7].$$

Observe que todo elemento de I é menor ou igual que 7. Mas, observe também que todo elemento de I é menor que 8, que 9, 10, 1000...

Podemos caracterizar o elemento 7 neste caso como um número que é maior ou igual à todos os elementos de I, mas também que é o menor número com essa propriedade, ou seja, se x é um número que é maior ou igual à todos elementos de I, então $7 \leq x$.

Podemos abstrair e fornecer a seguinte definição:

Definição 1.11

Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}$.

- Um número x que é maior ou igual que todo elemento de S é uma cota superior para S.
- Se S possui cota superior, dizemos que S é limitado superiormente.
- A menor cota superior de S (se existir) é denominada de supremo do conjunto S. Denotamos o supremo do conjunto por $sup(S)$.

Assim, no nosso exemplo anterior, os números 7,8,9, 10... são todos cotas superiores de $I = [3, 7[$ e o número 7 é o supremo do conjunto I, ou seja, $sup(S) = 7$.

O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ não tem uma cota superior, ou seja, não existe um número real que seja maior que todo número natural. Como consequência, o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$, dos racionais $\mathbb{Q}$, dos números irracionais e o conjuntos dos números reais $\mathbb{R}$ não são limitados superiormente.

Uma melhor caracterização para o supremo de um conjunto S pode ser dada da seguinte maneira:

Um número $x \in \mathbb{R}$ é o supremo do conjunto S se:

- Para todo $y \in S$, temos que $y \leq x$.
- Para todo $\varepsilon > 0$, existe $y \in S$ tal que
$$y + \varepsilon \geq x.$$

A primeira sentença acima apenas afirma que x é uma cota superior. A segunda sentença é equivalente a dizer que x é a menor das cotas superiores.

Observemos que o supremo de um conjunto, se existir, pode pertencer ao conjunto ou n˜ao. Por exemplo, se $S = \{0, 2, 3, \frac{7}{2}, 7, 22\}$, ent˜ao $x = 22$ ´e o supremo do conjunto S. Nestes casos, se o conjunto possui um m ´aximo, ent˜ao esse m´aximo ´e o o supremo. Por outro lado, considere o conjunto $S = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4} \quad \}$, ou de forma mais compacta: S é o conjunto formado por todos os números da forma

$$1 - \frac{1}{n},$$

para n um número natural maior que zero. Então temos que 1 é o supremo do conjunto S, mas $1 \notin S$.

Vamos agora enunciar a propriedade de completude dos números reais:

Teorema 31 (Completude de $\mathbb{R}$)**.** *Todo subconjunto não vazio e limitado superiormente de $\mathbb{R}$ admite supremo.*

Até o momento apenas trabalhamos com limitantes superiores. Naturalmente, temos definições análogas para o caso de limitantes inferiores:

Definição 1.12

Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}$.

- Um número x que é menor ou igual que todo elemento de S é uma cota inferior para S.
- Se S possui cota inferior, dizemos que S é limitado inferiormente.
- A maior cota inferior de S (se existir) é denominada de ínfimo do conjunto S. Denotamos o ínfimo do conjunto por $inf(S)$.

Por exemplo, se $S = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\}$, então

- -5, -1, 0 são exemplos de cotas inferiores e
- o número 0 é o ínfimo do conjunto S.

Como consequência da Completude de $\mathbb{R}$, podemos também enunciar o seguinte:

Lema 32. *Todo subconjunto não vazio e limitado inferiormente de $\mathbb{R}$ admite ínfimo.*

A prova segue-se considerando que se S é não vazio e limitado inferiormente, então o conjunto $-S = \{-x : x \in S\}$ é não vazio e limitado superiormente. Logo admite supremo $y = sup(-S)$. Basta notar agora que $-y$ é o ínfimo de S.

1.5 Relações

Nesta seção, vamos introduzir a definição de relação entre dois conjuntos.

Considere a expressão $x < y$. É uma expressão abertas : seu valor verdadeiro ou falso depende dos valores de x e y.

Podemos pensar que a expressão é uma relação entre as variáveis x e y. Suponha que $A = \{5, 2, 3, 8\}$ e $B = \{-1, 6, 7\}$. Para quais valores de $x \in A$ e $y \in B$ a relação é verdadeira?

Podemos verificar que se tomarmos $x = 5$ no conjunto A e $y = 6$ no conjunto B, então é valida a relação $x < y$. Mais ainda, podemos verificar que o par ordenado $(5, 6)$ do produto cartesiano $A \times B$ satisfaz a relação $x < y$.

Considerando agora todos os pares (x, y) tais que $x \in A$ e $y \in B$ e $x < y$, chegamos ao subconjunto

$$R = \{(5, 6), (5, 7), (2, 6), (2, 7), (3, 6), (3, 7)\} \subset A \times B$$

Podemos dizer que cada par do conjunto construido acima é uma relação entre a primeira coordenada e a segunda coordenada.

O conjunto R construido acima é o que vamos chamar de uma **relação** de A em B.

Definição 1.13

Uma relação R entre os conjuntos A e B é um subconjunto de $A \times B$:

$$R \subset A \times B$$

Se o par $(x, y) \in R$, dizemos que x esta associado ao elemento y e escrevemos $y = R(x)$. Em alguns livros, é também usado a notação xRy para indicar que $(x, y) \in R$.

Observe que na introdução, consideramos primeiro uma relação da forma $x < y$ e depois contruímos o conjunto $R \subset A \times B$. Na definição acima de relação entre dois conjuntos, uma relação é qualquer subcojunto R do produto cartesiano de A por B.

Exercício 1.23

Construa a relação de $A = \{2, 6, 1, 9\}$ em $B = \{3, 9, 2, 0\}$ definida pela expressão $x = y$

Um modo importante de vizualizar uma relação é através do uso de diagramas de Venn. O seguinte exemplo mostra essa construção:

Exemplo 33. *Considere* $A = \{2, 6, 1, 9\}$, $B = \{4, 9, 2\}$ *e a relação de* A *em* B *dada por* $R = \{(6, 9), (6, 2), (1, 4)\}$. *Podemos representar essa relação pelo seguinte diagrama da Figura 1.15.*

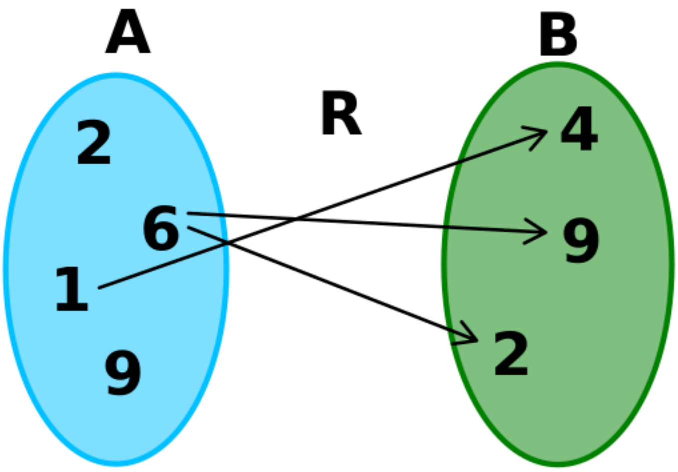


Figura 1.15: Relação R

Definição 1.14

Dada uma relação R de A em B, chama-se domínio de R ao conjunto dos x que pertencem a A tais que existe $y \in B$ e $(x, y) \in R$. Denotamos o domínio da relação R por $Dom(R)$.

Em outras palavras, o conjunto formado pelas primeiras coordenadas dos pares que estão em R.

Exemplo 34. *Considere a relação* $R = \{(1, 4), (4, 2), (0, 1)\}$. *Então* $Dom(R) = \{1, 4, 0\}$.

Definição 1.15

Considere uma relação R de A em B.

1. Denominamos B de contra-domínio de R.
2. Denominamos de imagem de R ao conjunto dos y que pertencem a B tais que existe $x \in A$ e $(x, y) \in R$. Em outras palavras, a imagem de R, denotada por $Img(R)$ é o conjunto formado pelas segundas coordenadas dos pares que estão em R.

Exemplo 35. *Considere a relação* $R = \{(1, 4), (4, 2), (0, 1), (-1, 2)\}$ *em* $A = \{1, 4, 0, -1, 5\}$ *e* $B = \{4, 2, 1, 7, 9, 0\}$. *Então:*

1. $Dom(R) = \{1, 4, 0, -1\}$.

2. $Img(R) = \{4, 2, 1, 2\}$.

Observação 36. *Dada uma relação R de A em B, temos que*

1. $Dom(R) \subset A$.

2. $Img(R) \subset B$.

Exercício 1.24

Considere $R = \{(2, 0), (4, 1), (-1, 1)\}$. Se $A = \{2, 4, 4\}$ e $B = \{0, 2, 3\}$ é possível que R seja uma relação de A em B ?

Se R e S são relações de A em B, então R e S são subconjuntos de $A \times B$ e portanto, podemos realizar as operações de união, intersecção e complementos, obtendo novas relações de A em B:

Definição 1.16

Considere R e S relações de A em B. Definimos

1. A relação união $R \cup S$.

2. A relação intersecção $R \cap S$.

3. A relação complementação $R^C = (A \times B) \setminus R$.

Exercício 1.25

Considere $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ e as relações $R = \{(x, y) : x \leq y\}$, $S = \{(x, y) : x \geq y\}$ e $T = \{(x, y) | x = y\}$. Determinar $R \cap S$, $R \cup S$ e R^C.

Exercício 1.26

Considere $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ e as relações $R = \{(x, y) : x \leq y\}$, $S = \{(x, y) : x \geq y\}$ e $T = \{(x, y) | x = y\}$. Fazer o diagrama no plano cartesiano.

Definição 1.17: Relação inversa

Dada uma relação R de A em B, definimos a relação inversa R^{-1} como a relação de B em A tal que $(y, x) \in R^{-1}$ se, e somente se, $(x, y) \in R$.

Exercício 1.27

Sejam $A = \{-1, 0, 2\}$ e $B = \{-1, -2, 5, 6\}$. Considere a relação R definida por $x \leq y$. Determine a relação inversa R^{-1}.

Definição 1.18: Composição

Dadas duas relações R de A em B e S de B em C, podemos definir uma relação T de A em C. Definimos T como o conjunto dos pares (x, z) tal que existe $y \in B$ com $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in C$. A relação T é denotada por $S \circ R$ e denominada de composta de S e R.

A Figura 1.16 representa a relação de composição através de diagramas.

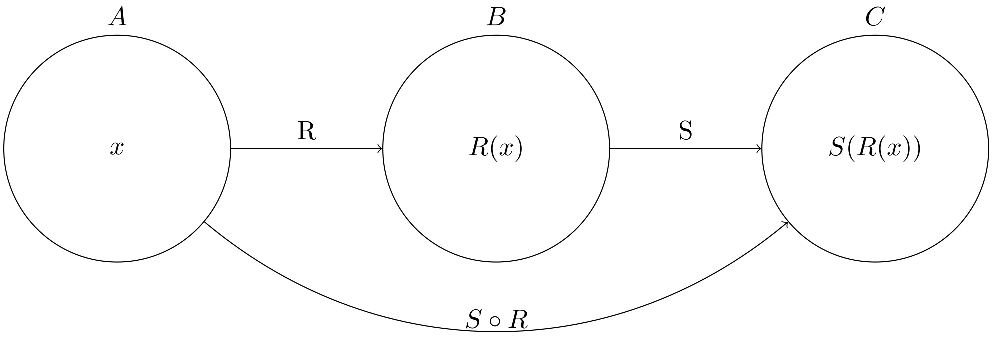


Figura 1.16: Composição

Exercício 1.28

Considere a relação $R = \{(1,2),(4,5),(4,7)\}$ de $A = \{1,4,5\}$ em $B = \{2,5,7,8\}$ e a relação $S = \{(2,-1),(7,10)\}$ de B em $C = \{-1,0,5,10\}$. Determine a relação $S \circ R$:

Definição 1.19

Considere R uma relação de A em A. Dizemos que:

1. R é uma relação reflexiva se $(x,x) \in R$ para todo $x \in A$;
2. R é uma relação simétrica se $(x,y) \in R$ implicar $(y,x) \in R$;
3. R é transitiva se $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R$ implicar que $(x,z) \in R$;

Exemplo 37. *Considere $A = \{0,2,4\}$ e R a relação $R = \{(0,0),(2,2),(4,4)\}$. Então R é uma relação reflexiva, simétrica e transitiva em A.*

Exemplo 38. *Considere $A = \{0,2,4\}$ e R a relação $R = \{(0,0),(2,2),(4,4),(2,4)\}$. Então R é uma relação reflexiva. A relação R não é simétrica pois $(2,4) \in R$, mas $(4,2) \notin R$. Também não é transitiva pois $(2,2) \in R$ e $(2,4) \in R$, mas $(2,4) \notin R$.*

Exercício 1.29

Considere $A = \{a,b,c,d\}$. Classifique as seguintes relações em A em reflexivas, simétricas e transitivas:

1. $R = \{(a,a),(a,b),(b,c),(a,c)\}$.
2. $R = \{(a,a)\}$.
3. $R = A \times A$.
4. $R = (A \times A) \setminus \{(b,a)\}$.

1.5.1 Exercícios

1. Construa as relações e esboce o diagrama:

   (a) $A = \{4,2,1,5\}$, $B = \{0,4,8,1\}$ e y é múltiplo de x.

(b) $A = \{0, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ e $x + y = 4$.

(c) $A = \{-1, 5, 7, 2\}$, $B = \{0, 3, 5, 2\}$ e $x \neq y$.

(d) $A = \{-1, 5, 2, 3\}$, $B = \{0, \{5, 2\}, \{-1, 3\}\}$ e $x \in y$.

2. Considere $R = \{(1, 3), (4, 5), (7, 10)\}$, $A = \{1, 7, -4\}$ e $B = \{3, 7, 4, 10\}$. Pode R ser uma relação de A em B?

3. Considere $A = \{2, 5, 3\}$, $B = \{0, 3, 4\}$ e $R = \{(2, 4), (5, 4)\}$. Determine uma expressão que determina a relação R.

4. Seja $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida por $y = x + 3$. Determine $dom(R)$ e $Img(R)$.

5. Considere $A = \{0, 3, 5, 9\}$, $B = \{1, 5, 4, 7, 3\}$ e as relações $R = \{(x, y) : x \leq y\}$, $S = \{(x, y) : y = x + 1\}$ e $T = \{(x, y) | x = y^2\}$. Determinar $R \cap S$, $R \cup S$ e T^C. Fazer o diagrama no plano cartesiano das relações R, S e T.

6. Sejam $A = \{-1, 0, 2, 5, 6\}$ e $B = \{-1, -2, 5, 6\}$. Considere a relação R definida por $x = y$. Determine a relação inversa R^{-1}.

7. Sejam $A = \{-1, 0, 2, 5, 6, 10\}$ e $B = \{-1, -2, 5, 6\}$. Considere a relação $R = \{(0, -1), (-1, 5), (10, 2)\}$. Determine a relação inversa R^{-1}.

8. Considere a relação $R = \{(0, 7), (4, 5), (2, 2), (4, 7)\}$ de $A = \{0, 1, 2, 4, 5\}$ em $B = \{2, 5, 7, 8\}$ e a relação $S = \{(8, -1), (7, 10), (2, 5)\}$ de B em $C = \{-1, 0, 5, 10\}$. Determine a relação $S \circ R$. Faça um diagrama.

9. Considere $A = B = C = \mathbb{N}$ e as relações R definida por $y = x + 1$ e S definida por $y = x + 2$. Determine a relação composta $S \circ R$.

10. Considere A e B conjuntos e R uma relação de A em B. Determine $R \circ R^{-1}$ e $R^{-1} \circ R$.

CAPÍTULO 2

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Equações algébricas são igualdades envolvendo uma variável (ou mais). O objetivo é encontrar valores para essas variáveis que satisfaçam a igualdade.

2.1 Equações do Primeiro Grau

Vamos iniciar o estudo das equações pelo tipo mais simples, que são as equações de primeiro grau:

Definição 2.1

Uma equação (algébrica) do primeiro grau é uma igualdade da forma:

$$ax + b = 0$$

onde a, b são números reais fixos, com $a \neq 0$.

Exemplo 39. *Em uma empresa, o salário de cada funcionário é dado por uma parte fixa, no valor de R$ 1000,00, mais um adicional de R$ 20,00 por unidade de produtos vendidos por esse funcionário. Sabendo-se que um funcionário recebeu R$ 2000,00 de salário, determine quantos produtos foram vendidos por esse funcionário.*

No exemplo acima, vamos denotar por x a quantidade de produtos vendidos pelo funcionário. Assim, a equação que obtemos é $1000 + 20x = 2000$.

Vamos agora obter a solução da equação acima, ou seja, encontrar um valor de x que satisfaça a equação. Para isso, queremos transformar a equação de tal forma que fique simplificado e da forma $x =$ valor.

Podemos pensar na igualdade como uma balança, e em uma equação como sendo uma balança equilibrada. Assim, se alteramos um lado da igualdade (ou seja, um lado da balança), para manter a balança equilibrada, devemos realizar exatamente a mesma operação do outro lado da balança.

Voltando a equação $1000+20x = 2000$, queremos isolar o x de um lado, e determinar o valor corresponde que deve ficar do outro lado. Para isso, e mantendo o equilíbrio dos dois lados, vamos subtrair o valor -1000 dos dois lados

$$1000 + 20x - 1000 = 2000 - 1000$$

Lembre: Subtraímos 1000 dos dois lados, para manter a balança em equilíbrio. Agora, efetuando as operações, temos a nova configuração da balança:

$$20x = 1000$$

Para finalizar, ou seja, isolar apenas o x, vamos dividir os dois lados da equação por 20:

$$\frac{20x}{20} = \frac{1000}{20}$$

Efetuando a operação de divisão, chegamos a:

$$x = 50$$

Assim, concluímos que o funcionário realizou a venda de 50 unidades do produto.

Exemplo 40. *Vamos resolver a equação* $-2x-4=8$. *Novamente, queremos eliminar o* -4 *do lado esquerdo da equação. Para isso, adicionamos 4 nos dois lados da equação e obtemos* $-2x-4+4=8+4$ *e assim,* $-2x=12$. *Para finalizar, dividimos ambos os lados por* -2 *e obtemos* $\frac{-2x}{-2}=\frac{12}{-2}$, *ou seja* $x=-6$.

2.1.1 Exercícios

1. Resolva as seguintes equações:

   (a) $2x + 3 = 7$

   (b) $-4x + 5 = 1$

   (c) $\frac{x}{2} - 2 = 10$

   (d) $7x + 8 = 22$

   (e) $-x + 4 = 9$

   (f) $6x - \frac{7}{3} = 13$

   (g) $2x + 9 = 15$

   (h) $-3x + 6 = 0$

   (i) $4x - \frac{5}{2} = \frac{3}{4}$

   (j) $9x + 2 = 11$

2. Sejam x e y números tais que os conjuntos $\{0, 7, 1\}$ e $\{x, y, 1\}$ são iguais. Então, podemos afirmar que:

   (a) $x = 0$ e $y = 5$.

   (b) $x + y = 7$.

(c) $x = 0$ e $y = 1$.

(d) $x + 2y = 7$.

(e) $x = y$.

2.2 Equações do Segundo Grau

Uma equação do segundo grau é uma igualdade da forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

onde a, b são números reais fixos $(a \neq 0)$.

Exercício 2.1

Verifique quais equações abaixo são equações do segundo grau:

1. $2x^2 - 2x + 3 = 0$
2. $x^2 - 4 = 0$
3. $x + 1 = 4$
4. $x^2 + 2x = 3x^2$

Para encontrar as soluções de uma equação do segundo grau, ou seja, suas raízes, usamos o seguinte resultado:

Teorema 41. *Seja $ax^2 + bx + c = 0$ uma equação do segundo grau. Então as raízes são dadas por*

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

e

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

A expressão para a solução de uma equação do segundo grau é comumente denominada de Fórmula de Bhaskara. Podemos rescrever a solução da seguinte forma

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Exemplo 42. *Vamos encontrar as raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$. Primeiramente, identificamos os coeficientes:*

- $a = 1$.
- $b = -5$.
- $c = 6$.

Com os coeficientes determinados, podemos calcular o valor de Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1$$

Assim, as raízes são dadas por

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{5+1}{2} = 3$$

e

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{5-1}{2} = 2$$

Assim, as raízes são $x_1 = 3$ e $x_2 = 2$.

Exercício 2.2

Determine as raízes de $x^2 - 9x + 20 = 0$.

Exemplo 43. *Vamos encontrar as raízes da equação $x^2 - 2x - 2 = 0$. Efetuando o calculo do delta, encontramos que*

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 4 + 4 = 8.$$

Assim, as soluções são dadas por

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{8}}{2 \times 1} = \frac{2 + \sqrt{8}}{2}$$

e

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{8}}{2 \times 1} = \frac{2 - \sqrt{8}}{2}$$

Observe que, como não existe raiz exata de $\sqrt{8}$, simplesmente deixamos a raiz, sem fazer nenhuma aproximação. Em problemas práticos, pode ser necessário fazer uma aproximação dessa raiz, mas em geral, é mais conveniente deixar a raiz. Em particular, as raízes da equação são dadas por

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{8}}{2}$$

e

$$x_2 = \frac{2 - \sqrt{8}}{2}$$

Podemos ainda simplificar as expressões e obter

$$x_1 = 1 + \sqrt{2}$$

e

$$x_2 = 1 - \sqrt{2}$$

Lembrando[1] *que* $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ *e depois dividindo o numerador pelo número 2.*

Exemplo 44. *Considere a equação* $x^2 - x + 4 = 0$*. Então*

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -15$$

Observe que não existe um número real x *tal que* x^2 *é negativo. Assim,* $\sqrt{-15}$ *não é um número real. Neste caso, dizemos que a equação não admite raízes reais.*

2.2.1 Exercícios

1. Encontre as raízes das seguintes equações:

   (a) $x^2 - 4x + 4 = 0$

   (b) $2x^2 + 3x - 5 = 0$

   (c) $3x^2 - 6x + 3 = 0$

   (d) $x^2 + 7x + 12 = 0$

   (e) $-x^2 + 6x - 9 = 0$

   (f) $4x^2 - 8x + 4 = 0$

   (g) $x^2 - 5x + 6 = 0$

   (h) $-2x^2 + 4x - 2 = 0$

   (i) $5x^2 + 2x - 1 = 0$

   (j) $x^2 + 2x + 1 = 0$

2. Escreva uma equação do segundo grau que possua como raízes $x = -1$ e $x = \frac{1}{2}$.

3. Determine um valor para k de tal forma que a equação $x^2 - 2x + k = 0$ possua apenas uma raiz real.

4. Encontre as raízes da equação $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$.

5. O lucro mensal de uma empresa é dado por $L = -x^2 + 10x - 16$, em que x é a quantidade mensal vendida. Para que valores de x o lucro é nulo (Ponto conhecido como break-even)?

6. A receita diária de um estacionamento para automóveis é $R = 100p - 5p^2$, em que p é o preço cobrado pela diária de um veículo estacionado. Qual preço deve ser cobrado para obtermos uma receita diária de \$ 375?

[1] Propriedades das raízes serão revisadas na Seção 3.7.1

CAPÍTULO 3

FUNÇÕES

Nesta seção vamos estudar as funções, que são um tipo especial de relação entre dois conjuntos e que desempenha um papel fundamental em toda a matemática.

3.1 Introdução

Dados dois conjuntos A e B, uma função de A em B é uma relação f de A em B (logo, $f \subset A \times B$) com a seguinte propriedade:

Para **todo** $x \in A$, existe um **único** $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

Vamos usar a seguinte equivalente definição:

Definição 3.1

Sejam A e B conjuntos. Uma função de A e B é uma relação (representada por $f : A \to B$) tal que

1. Todo elemento de A esta associado a algum elemento de B.

2. Cada elemento de A esta associado a no máximo um elemento de B.

Podemos resumir 1) e 2) por:

Todo elemento de A, associamos um **único** elemento de B.

Notação. Se $x \in A$, denotamos por $f(x) \in B$ o elemento de B associado ao elemento x pela função f.

Exemplo 45. *Suponha que em uma empresa, o salário em uma determinada posição é em função das horas trabalhadas, (R\$ 10.00/hora). Considere A como sendo o conjunto das quantidades de horas trabalhadas e seja B o conjunto de todos os valores de salários em reais. Suponha que $f : A \to B$ define o valor do salário em função das horas trabalhadas. Assim, se você trabalhar 40 horas em um mês, então seu salário será de R§400,00. Assim,* 40 *horas esta associado a R§400,00 pela função f, ou seja, $f(40) = 400$.*

De modo análogo, $f(30) = 300$, ou seja, o salário se você trabalhar 30 horas será de R§300,00. Observe que nossa relação Hora X Salário é de fato uma função.

Primeiro, observe que, a todo valor corresponde de hora trabalhada, podemos associar um valor de salário (imagine trabalhar uma certa quantidade de horas, e no final não receber pois não existe um valor associado).

Segundo, observe que a cada quantidade de horas trabalhadas, nossa função retorna exatamente um único valor. Seria estranho você e um colega seu trabalharem a mesma quantidade de horas, na mesma posição, e seu colega receber um valor diferente.

Como toda função é uma relação, podemos aplicar aqui as definições que usamos para relações. Por exemplo, podemos considerar o domínio, o contra-domínio e a imagem de uma relação. Vamos relembrar essas definições para o caso específico de funções:

Definição 3.2

Considere uma função $f : A \to B$.

1. O conjunto A é denominado de domínio da função.
2. O conjunto B é denominado de contra-domínio da função.

Definição 3.3

Seja $f : A \to B$ uma função. O subconjunto de B formado por todos os elementos que estão associado a algum elemento de A é chamado de imagem da função. Notação $Img(f)$.

Exemplo 46. *Considere $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 5, 6, 7\}$ e a função $f : A \to B$ definida por $f(1) = 5$, $f(3) = 2$. Então*

1. *O domínio da função f é o conjunto A.*
2. *O contra-domínio da função f é o conjunto B.*
3. *A imagem da função é o conjunto $Img(f) = \{5, 2\}$.*

Definição 3.4

Dizemos que uma função $f : A \to B$ é **injetora** se todo elemento do contra-domínio B esta associado a no máximo um elemento de A.

Exemplo 47. *Considere A o conjunto dos alunos da faculdade e $B = \mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais. Considere a função f que associada a cada aluno, seu número RA (registro de aluno). Temos que f é uma função injetora, pois não pode acontecer de dois alunos distintos possuírem o mesmo número de RA.*

Exemplo 48. *Considere A o conjunto dos alunos de sua classe e B o conjunto formado pelos estados brasileiros. Considere a função f que associa a cada aluno, seu estado de origem. Para saber se essa função é injetora, você deve observar se na sua classe, existem pelo menos dois alunos que possuem o mesmo estado de origem.*

Observe que, se sua sala possui mais que 27 alunos e todos são brasileiros, então com certeza essa função não será injetora. Elabore um argumento para justificar essa última afirmação.

Definição 3.5

Dizemos que uma função $f : A \to B$ é **sobrejetora** se todo elemento do contra-domínio B esta associado a pelo menos um elemento de A.

Exemplo 49. *Considere A o conjunto formado por todas as pessoas e B o conjunto formado por todos os números de 1 até 31.*

Considere a função $f : A \to B$ que associa a cada pessoa, seu dia de nascimento. Então f é uma função sobrejetora.

Definição 3.6

Dizemos que uma função $f : A \to B$ é **bijetora** se é injetora e sobrejetora.

Exemplo 50. *Considere A o conjunto formado por todos motoristas brasileiros e B o conjunto formado por todos os números de CNH. Seja f a função que associa a cada motorista seu número de CNH. Então f é uma função bijetora.*

3.1.1 Exercícios

1. Determine quais relações são funções:

   (a) $A = \{4, 2, 1, 5\}$, $B = \{0, 4, 8, 1\}$ e $R = \{(4, 0), (2, 0), (1, 0), (5, 1)\}$

   (b) $A = \{0, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ e $R = \{(0, 4), (2, 6), (3, 5), (5, 6)\}$

   (c) $A = \{-1, 5, 7, 2\}$, $B = \{0, 3, 5, 2\}$ e $R = \{(-1, 2), (5, 3), (7, 0), (-1, 3), (7, 5)\}$.

   (d) $A = \{-1, 5, 2, 3\}$, $B = \{0, \{5, 2\}, \{-1, 3\}\}$ e $R = \{(-1, 0), (5, \{-1, 3\}), (2, 0), (3, 0)\}$.

   (e) $A = B = \mathbb{N}$ e R a relação x é divisor de y.

2. Considere P o conjunto de todas as pessoas. Verifique quais relações abaixo são funções:

   (a) Considere a relação R definida por x é pai de y.

   (b) Considere a relação R definida por x é irmão de y.

3. Considere A o conjunto de todos automóveis e B o conjunto formado por todos os tipos de combustíveis. Defina a relação R de A em B definida por y é combustível de x. Essa relação é função?

3.2 Funções em Conjuntos Numéricos

Quando trabalhamos com funções em conjuntos numéricos, principalmente quando os conjuntos envolvidos são infinitos, é natural trabalhar com funções definidas por expressões matemáticas. Vamos observar no exemplo seguinte como isso é feito:

Exemplo 51. *Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 2x^2$. Temos então que:*

1. *Domínio da função: Todo o conjunto $\mathbb{R}$.*

2. Contra-domínio da função: Todo o conjunto $\mathbb{R}$.

3. Considere o número 2. Qual o número associado ao 2 pela função f?

Aqui vamos usar a expressão da função. Por definição, dada um elemento qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos que o elemento do contra-domínio associado a x é representado por $f(x)$. Do enunciado, temos que $f(x) = x+2x^2$. Assim, como queremos saber qual o valor que esta sendo associado ao número 2, devemos encontrar $f(2)$, ou seja, $f(2) = 2 + 2 \times 2^2 = 6$. Logo, o elemento 2 é associado ao elemento 6 pela função em questão.

De um modo geral, para saber qual número esta sendo associado ao número x pela função, basta substitui o valor de x na expressão $f(x) = x + 2x^2$ que determina nossa função.

Exercício 3.1

Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 2x^2$. Determine

1. O valor que esta função associa ao número -2.
2. O valor que esta função associa ao número 5.

Exercício 3.2

Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{2x}{3} + \frac{1}{5}$. Determine o valor associado ao número 2, ou seja, determine $f(2)$.

Exercício 3.3

Considere a função $f : [2, 6] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + \frac{1}{2}$.

1. Qual o domínio da função?
2. Qual valor de $f(4)$?
3. Faz sentido calcular $f(7)$?

3.2.1 Exercícios

1. Considere $A = B = \mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ e a relação R dada por $y = x^2$. Essa relação é função? E no caso $A = B = \mathbb{N}$?

2. Decida se a função é injetora, sobrejetora, bijetora nos seguintes casos:

   (a) $A = \{0\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ e $f : A \to B$ dada por $f = \{(0, 2), (0, 3)\}$.

   (b) $A = \{-1, -2, 4, 5\}$, $B = \{0\}$ e $f(x) = 0$.

   (c) $A = B = \mathbb{N}$ e $f(x) = x$.

   (d) $A = B = \mathbb{N}$ e $f(x) = x + 2$.

3. Considere a expressão $y = \frac{1}{x}$.

   (a) Se $A = \mathbb{N}$ e $B = \mathbb{Q}$, a relação $y = \frac{1}{x}$ define uma relação de A em B? Em caso afirmativo, essa relação é uma função?

(b) Qual o maior subconjunto A de $\mathbb{N}$ podemos tomar de tal forma que a expressão $y = \frac{1}{x}$ seja uma função de A em $B = \mathbb{Q}$.

4. Sejam A e B dois conjuntos de tamanho finito.

   (a) Se A possui 7 elementos e B possui 5 elementos, pode existir uma função $f : A \to B$ injetora?

   (b) Se A possui 7 elementos e B possui 5 elementos, pode existir uma função $f : A \to B$ sobrejetora?

   (c) Se A possui 7 elementos e B possui 8 elementos, pode existir uma função $f : A \to B$ injetora?

   (d) Se A possui 7 elementos e B possui 8 elementos, pode existir uma função $f : A \to B$ sobrejetora?

   (e) Se A e B possuem quantidades de elementos diferentes, pode existir uma função $f : A \to B$ bijetora?

5. Seja $A = \mathbb{N}$ e B o conjunto dos números naturais pares. Existe bijeção entre A e B?

6. Seja A um conjunto. Pode existir uma função sobrejetora $f : A \to \wp(A)$?

7. Seja $f : A \to B$ uma função de A em B. Considere a relação inversa $f^{-1} : B \to A$. Quais as condições sobre f devemos ter para que f^{-1} seja uma função?

8. Considere $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e a função $f : A \to B$ dada por $f(x) = x + 1$. Determine f^{-1}.

9. Considere $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^2$. Determine $f \circ g$ e $g \circ f$.

3.3 Gráficos

Nesta seção, vamos estudar os gráficos. Gráficos são meios visuais de observar uma função. O primeiro exemplo que podemos citar é aquele momento em que você esta trabalhando em seu computador, mas ele começa a ficar um pouco lento. Naturalmente, você tenta observar o que esta deixando ele lento e abre um gerenciador de tarefas, com o intuito de olhar por exemplo o uso do CPU. Encontramos uma imagem semelhante a Figura 3.1.

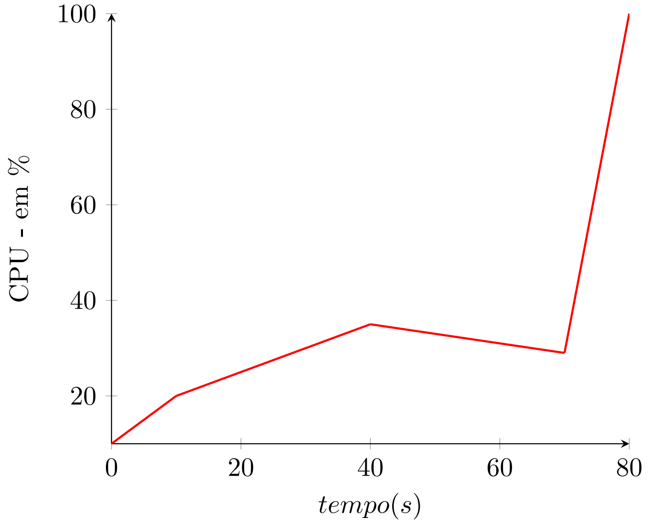


Figura 3.1: Uso de CPU

Apos 80 segundos de medição, você nota que existe um uso de quase 100% do CPU. Também, consegue observar que, anteriormente, a uns 60s a 40s atrás, o uso do CPU estava entre 20% a 40%, ou seja, existe algum processo que se iniciou após 80 segundos a partir do inicio da medição e que esta consumindo o uso de CPU, deixando o seu computador mais lento.

Interessante que todo o processo descrito acima é feito mentalmente, apenas olhando a imagem. O que temos na imagem é na verdade o gráfico da função que indica o uso do CPU, em função do tempo. Assim, podemos pensar em f uma função, que a cada instante de tempo x, fornece o uso do CPU a x segundos atrás. Dado que foi fácil a obtenção de informações da função apenas olhando seu gráfico, vamos nessa seção abordar a construção de gráficos de funções quaisquer, com o intuito de também obter informações sobre essas funções.

Vamos começar revisando o importante conceito de plano cartesiano:

O plano cartesiano é uma representação do produto cartesiano (estudado no capítulo sobre conjuntos) da reta real $\mathbb{R}$ com a própria reta real, ou seja, o conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, denotado convenientemente por $\mathbb{R}^2$. Sabemos que os elementos de $\mathbb{R}^2$ são pares ordenados da forma (x, y), onde x e y são números reais.

Cada ponto do plano cartesiano é a representação de um par ordenado (x, y), onde x representa a coordenada no eixo horizontal, denominado de eixo das abcissas, e y representa a coordenada no eixo vertical, denominado de eixo das ordenadas.

Na Figura 3.2 temos a representação do ponto $(2, 1)$.

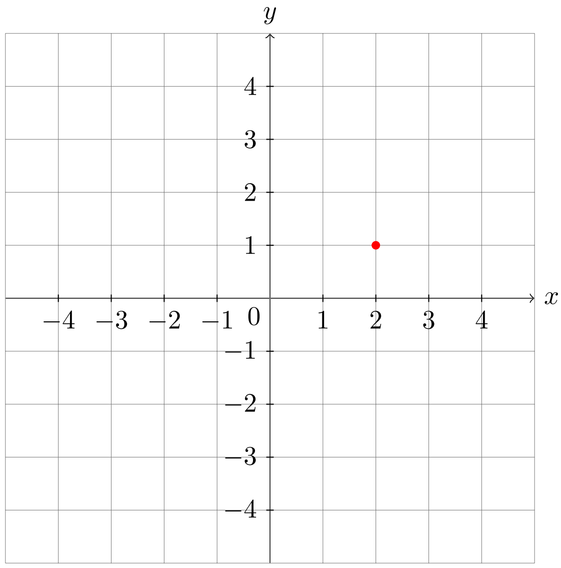


Figura 3.2: Plano Cartesiano e Ponto $(2, 1)$.

Definição 3.7

O gráfico de uma função $f : A \to B$, com $A, B \subset \mathbb{R}$ é a representação no plano cartesiano de todos os pares $(x, f(x))$ para $x \in A$.

Exemplo 52. *Considere $f : \{0, 2, 3, 4\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x - 1$. Vamos desenhar o gráfico da função f. Para isso, vamos calcular todos os pares da forma $(x, f(x))$, onde $x \in \{0, 2, 3, 4\}$. Neste caso, é conveniente construir a seguinte tabela:*

x	f(x)
0	-1
2	1
3	2
4	3

Tabela 3.1: Obtenção dos Pares

A tabela acima é construída da seguinte forma. Na primeira coluna (a coluna dos x) representamos os pontos do domínio, no caso, $A = \{0, 2, 3, 4\}$. Na segunda coluna, adicionamos os valores $f(x)$ correspondentes. Por exemplo, na segunda linha, adicionamos o valor -1 na coluna $f(x)$, pois $f(0) = 0 - 1 = -1$. Com a tabela, temos os pares ordenados da nossa função. Agora, basta desenhar esses pontos no plano cartesiano como mostra a Figura 3.3.

Exemplo 53. *Considere a função $f : [-1, 4] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3$. Vamos desenhar o gráfico de f. Observe que a diferença em relação ao exemplo anterior esta no fato de que o domínio da função, neste caso o intervalo $[-1, 4]$ é infinito, ou seja, contem infinitos pontos. Assim, construir uma tabela como no exemplo anterior parece inviável.*

Observando a expressão da função, $f(x) = 3$, vemos que para todo valor do intervalo $[-1, 4]$, a função associa o número 3. Em outras palavras $f(-1) = 3$, $f(0) = 3$, $f(0.5) = 3$ e assim por diante. Logo os pares

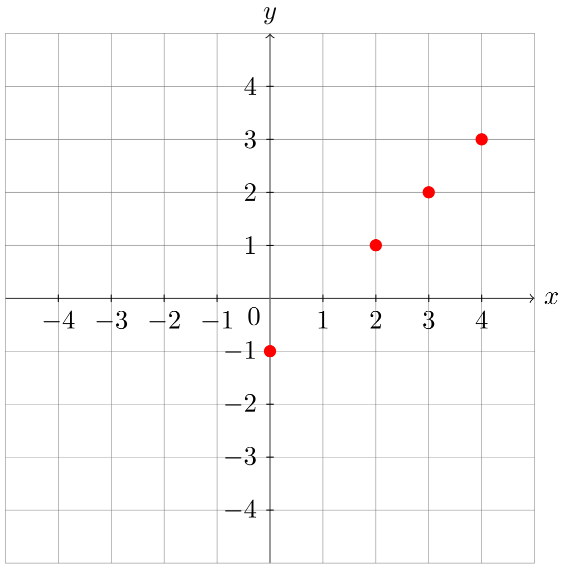


Figura 3.3: Gráfico da Função f

ordenados da função são da forma $(x, 3)$ *para* $x \in [-1, 4]$. *Desenhando essa quantidade infinita de pontos no plano cartesiano, obtemos o gráfico da função, apresentada na Figura 3.4.*

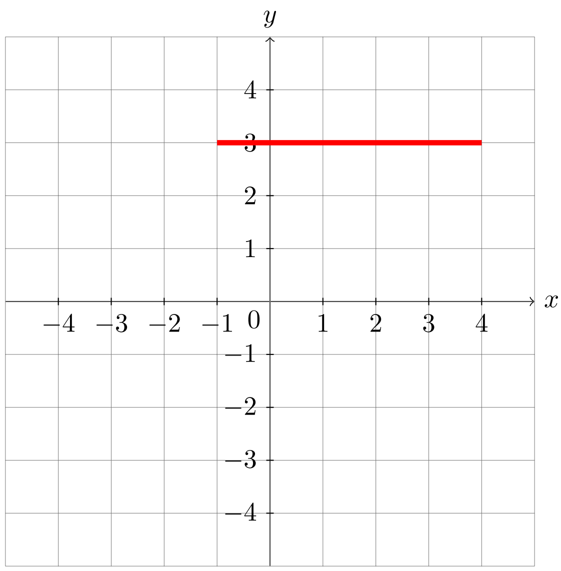


Figura 3.4: Gráfico da Função f

Nas seções seguintes, vamos estudar outros meios de desenhar o gráfico da função, dependendo do tipo da expressão da função.

3.3.1 Exercícios

1. Faça um esboço do gráfico da função $f : \{0, 3, 4, 5\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x - 5$.

2. Considere a função com o gráfico dada pela Figura 3.5.

   (a) Determine o valor de $f(3)$.

   (b) Qual o domínio da função f.

3. Uma empresa tem lucros anuais dada pelo gráfico da Figura 3.6.

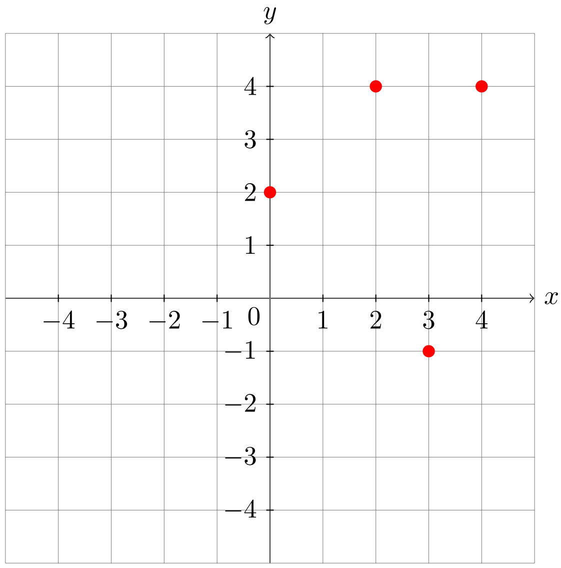


Figura 3.5: Gráfico da Função f

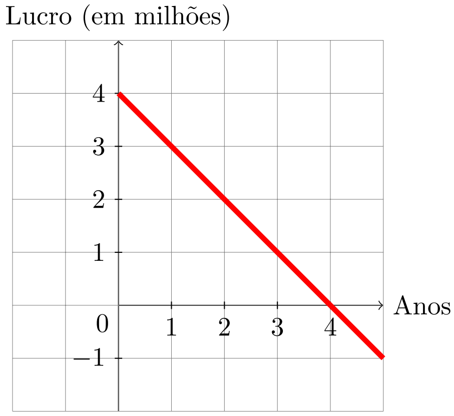


Figura 3.6: Gráfico do Lucro da Empresa

(a) Qual o lucro da empresa no ano 0?

(b) Qual o lucro da empresa no ano 2?

(c) Baseando-se apenas no gráfico do lucro, descreva o comportamento do lucro da empresa.

3.4 Função do Primeiro Grau

Definição 3.8

Uma função do primeiro grau é uma função que tem expressão da forma $f(x) = ax + b$, onde a, b são números reais fixos e $a \neq 0$.

Exercício 3.4

Exemplos: Verifique quais são funções do primeiro grau:

1. $f(x) = -2x - 2$
2. $f(x) = x$
3. $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$
4. $f(x) = x^2 + 1$
5. $f(x) = \frac{1}{x} + 2$.

Uma função do primeiro grau descreve um comportamento linear em relação a variável. De outro forma, implica que uma variação na variável x provoca uma variação proporcional em relação aos valores de $f(x)$. Como exemplo, suponha que em uma loja, cada vendedor recebe um valor fixo de R$ 1000,00, mais R$ 10,00 como comissão por produto vendido. Temos assim uma função salário $S(x)$ que a cada valor x que indica a quantidade de produtos vendidos, fornece o salário do funcionário.

Explicitamente, podemos escrever a função $S(x) = 1000+10x$. Observe que, se um vendedor passar de 10 vendas para 20 vendas (um incremento de 10 produtos), seu salário varia de $S(10) = 1100$ para $S(20) = 1200$, ou seja, um aumento de $R\$100,00$. Para a função salário, um aumento de Δx horas trabalhadas, resulta em um aumento de $10 \times \Delta x$ no salário.

Vamos agora desenhar o gráfico de uma função do primeiro grau. Para isso, usamos o importante fato de que o gráfico de uma função do primeiro grau é uma reta.

Exemplo 54. *Considere a função $f : [-2, 5] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x - 1$. Vamos desenhar o gráfico da função f.*

1. *Identificação do tipo de função: Primeiramente, vamos verificar qual o tipo da função que estamos querendo desenhar o gráfico. No caso, vemos que a expressão $f(x) = 2x - 1$ é a expressão de uma função do primeiro grau.*

2. *Sabendo o tipo de função, no caso, uma função do primeiro grau, sabemos que seu gráfico deve ser uma reta.*

3. *Para desenhar uma reta, basta dois pontos desta reta. Assim, calculamos a função f em dois pontos distintos do domínio. Vamos utilizar os pontos $x = -1$ e $x = 3$. Neste caso, temos que $f(-1) = 2 \times (-1) - 1 = -3$ e $f(3) = 2 \times 3 - 1 = 5$. Assim, os pontos $(-1, -3)$ e $(3, 5)$ pertencem ao gráfico de f.*

4. *Para concluir, basta desenhar esses dois pontos no plano cartesiano e traçar uma reta que contenha esses dois pontos. O comprimento dessa reta é determinada pelo domínio da função, ou seja, o intervalo* $[-2.5]$.

A Figura 3.7 mostra o gráfico da função. Na figura podemos observar os dois pontos desenhados inicialmente (o ponto $A(-1,-3)$ *e o ponto* $B(3,5)$*).*

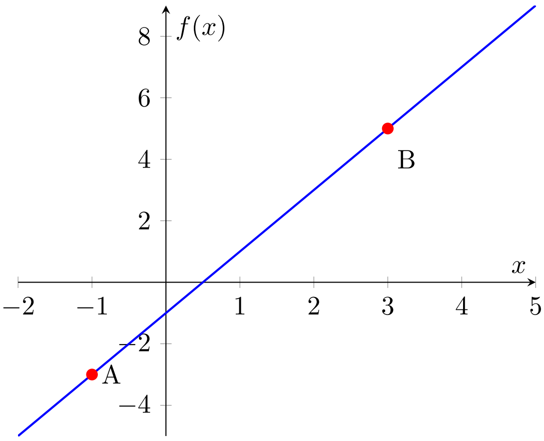


Figura 3.7: Gráfico da Função f

Exercício 3.5

Considere a função $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x + 1$. Faça um esboço do gráfico de f.

Considere uma função do primeiro grau com expressão dada por $f(x) = ax + b$. Notemos que, para $x = 0$, temos $f(0) = b$. Assim, o valor b representa o ponto no eixo das ordenadas (eixo y) onde o gráfico da função f encontra o eixo das ordenadas (mais especificamente, no ponto $(0,b)$). Denominamos b de coeficiente linear.

O valor a é denominado de coeficiente angular, e representa a valor da tangente[1] do ângulo entre o gráfico da função e o eixo das abcissas. De fato, para $x_1 \neq x_2$, temos que

$$tan(\alpha) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{ax_1 + b - ax_2 - b}{x_1 - x_2} = \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = a$$

.

O sinal do coeficiente angular será importante para definir se a função é crescente ou decrescente:

Definição 3.9

Considere uma função $f : D \to \mathbb{R}$ definida em um subconjunto $D \subset \mathbb{R}$. Dizemos que f é:

- Crescente, se dados $x, y \in D$ com $x < y$, então $f(x) \leq f(y)$.
- Decrescente, se dados $x, y \in D$ com $x < y$, então $f(x) \geq f(y)$.

Considere uma função do primeiro grau $f(x) = ax + b$. Então:

1. f é crescente se $a > 0$ e

[1]Ver Seção 3.9 para uma revisão sobre trigonometria.

2. f é decrescente se $a < 0$.

Observe mais ainda que vale a desigualdade restrita, ou seja, se $a > 0$, então $f(x) < f(y)$ para $x < y$ e se $a < 0$, temos que $f(x) > f(y)$. Neste caso, dizemos que a função é estritamente crescente (estritamente decrescente, respectivamente).

3.4.1 Equação da Reta

Em muitas situações, é necessário obter a função do primeiro grau (sua expressão) em termos de pontos de seu gráfico. Em outras palavras, devemos obter a equação da reta. A compreensão deste tópico será de suma importância no estudo de derivadas no cálculo.

Exemplo 55. *Vamos obter a equação da reta, tendo como informação um ponto de seu gráfico e seu coeficiente angular. Como exemplo, suponha que o ponto $(2, 3)$ esta na reta, que possui coeficiente angular igual a -1. Então para obter a equação da reta, usamos a expressão*

$$y - y_0 = \alpha(x - x_0)$$

No nosso exemplo, temos que $(x_0, y_0) = (2, 3)$ e $\alpha = -1$. Assim, substituindo:

$$y - 3 = -1(x - 2)$$

Reorganizando os termos, obtemos

$$y = -x + 5$$

que é a equação da reta procurada.

Exemplo 56. *Nesse exemplo, vamos obter a equação da reta, tendo como informação dois pontos da reta. Suponha, como exemplo, que estamos interessados em obter a equação da reta que possui os pontos $(3, 2)$ e $(4, 3)$. Podemos usar o exemplo anterior, para isso, basta encontrarmos o coeficiente angular α, que nesse caso é dada por*

$$\alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

No exemplo, temos $(x_1, y_1) = (3, 2)$ e $(x_0, y_0) = (4, 3)$. Logo $\alpha = \frac{2-3}{3-4} = \frac{-1}{-1} = 1$. Para concluir, basta seguir como no exemplo anterior e obter

$$y - 3 = 1(x - 4)$$

ou seja,

$$y = x - 1$$

3.4.2 Inequações do Primeiro Grau

Consideremos o seguinte exemplo:

Exemplo 57. *Uma máquina de processamento de alimentos, possui eficiência que decai a medida que a* *temperatura de operação aumenta. Mais especificamente, a função de eficiência de acordo com a temperatura é dada por $E(t) = -2.5t + 100$, onde a temperatura varia de 0º a 40º e a eficiência é dada em porcentagem.*

Para gerar lucro para a empresa, a máquina deve operar apenas se sua eficiência estiver maior que 60%. Deve se determinar então quais são as temperaturas em que a máquina pode operar.

Para resolver o problema acima, devemos fornecer todos os valores de temperatura, tal que a eficiência da máquina nessas temperaturas fique acima de 60%. Como $E(t)$ é a função que fornece a eficiência na temperatura t, queremos encontrar todos os valores de t tal que

$$E(t) > 60$$

ou seja,

$$-2.5t + 100 > 60.$$

Temos acima um exemplo de inequação algébrica. Inequações algébricas envolvendo uma ou mais variáveis determinam possíveis valores que as variáveis podem assumir. Geralmente a solução não é dada por um número finito de valores, mas um intervalo da reta. No nosso exemplo, temos uma inequação de primeiro grau, pois envolve apenas a variável t sem potências maiores que 1.

A Figura mostra o gráfico da função $E(t)$, juntamente com o nível mínimo de 60% de eficiência. Queremos encontrar os valore de t, que nos forneçam valores $E(t)$ maiores que 60%. No gráfico, podemos ver que esses valores correspondem aos valores t tal que o gráfico da função f fica acima da linha horizontal vermelha.

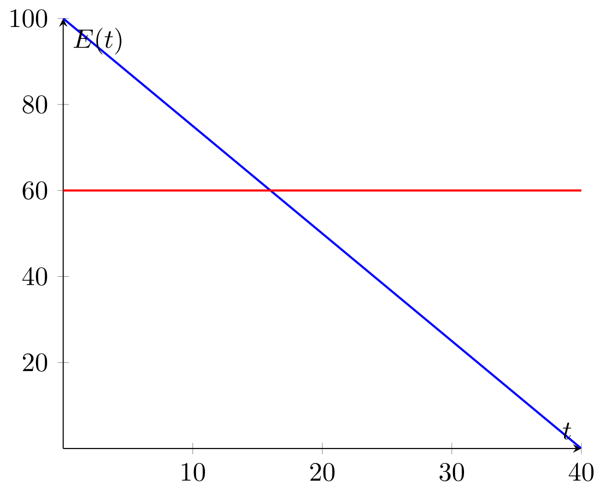


Figura 3.8: Eficiência $E(t)$

Para solucionar uma inequação algébrica de primeiro grau, vamos começar resolvendo como uma equação do primeiro grau:

$$-2.5t + 100 > 60.$$

$$-2.5t > 60 - 100.$$

$$-2.5t > -40$$

A diferença esta na última parte. Para eliminar o sinal negativo do lado esquerdo da desigualdade, vamos multiplicar ambos os lados por -1. No entanto, devemos também trocar o sinal da desigualdade:

$$-2.5t > -40$$

$$2.5t < 40$$

$$t < \frac{40}{2.5} = 16$$

Logo, a máquina deve operar para temperaturas inferiores a 16^{o}.

Observação 58. *A troca do sinal de desigualdade deve ser realizada apenas quando se multiplica por um número negativo os dois lados da desigualdade. No caso de se multiplicar os dois lados por um número positivo, não realizamos a troca de sinal. Vejamos um exemplo: Considere a inequação $2x + 5 > 13$. Então*

$$2x + 5 > 13.$$

$$2x > 13 - 5.$$

$$2x > 8.$$

$$x > \frac{8}{2}.$$

$$x > 4.$$

Observação 59. *Por qual motivo realizamos a troca do sinal de desigualdade?*

Considere a seguinte simples inequação, que sabemos ser verdadeira: $-5 < -1$. Suponha que queremos trocar o sinal negativo de ambos os lados, mas que vamos manter o simbolo de desigualdade. Então teríamos $5 < 1$, o que claramente não é verdade. Por isso, se torna necessário trocar o simbolo de desigualdade, quando multiplicamos ambos os lados por um número negativo (em particular, na troca de sinal).

Vamos finalizar essa seção com alguns comentários sobre o módulo de um número real.

Exemplo 60. *Seja $r > 0$. Então $|x| < r$ se, e somente se, $-r < x < r$. Em outras palavras, $|x| < r$ é equivalente a dizer que o número x esta entre $-r$ e r na reta real.*

De fato, se $x > 0$, pela definição de módulo temos que $|x| = x$. Logo, de $|x| < r$ concluímos que $x < r$. Além disso, como $r > 0$, então $-r < 0$ de onde concluímos que $-r < x < r$.

Por outro lado, se $x < 0$, então $|x| = -x$. Logo, de $|x| < r$ concluímos que $-x < r$ e portanto $x > -r$. Além disso, se $x < 0$, então naturalmente $x < r$. Concluímos assim que $-r < x < r$. Em ambos os casos, $-r < x < r$. Mostramos assim que $|x| < r$ implica $-r < x < r$. Para mostrar a outra implicação, basta lembrar que o módulo de x indica a distância de x a origem. Logo, se $-r < x < r$, então $|x| < |r| = r$.

Exercício 3.6

Mostre que $|x - p| < r$ é equivalente a $p - r < x < p + r$.

3.4.3 Exercícios

1. Faça o esboço dos gráficos das seguintes funções:

   (a) $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 4x$.

   (b) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 1$.

   (c) $f : (-1, 4) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -2x + 3$.

   (d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 4x - 3$.

2. Encontre a equação da reta que passa pelos pontos:

   (a) $(0, 0)$ e $(2, -3)$.

   (b) $(1, 2)$ e $(5, 2)$.

   (c) $(-3, 0)$ e $(0, 2)$.

3. Verifique se os pontos $(2, 3)$, $(3, 5)$ e $(2, 2)$ pertencem a uma mesma reta.

4. Escreva a equação da reta que passa pelo ponto $(3, 5)$ e possui inclinação $\alpha = 3$.

5. Faça o esboço do gráfico da função módulo $f(x) = |x|$.

6. Faça o esboço do gráfico da função $f(x) = |x - 1|$.

7. Seu Carlos está indeciso quanto a um plano de saúde que precisa escolher. O plano 1 custa R$310,00 por mês, mais R$16,00 por consulta. Já o plano 2 custa R$190,00 por mês, mais R$32,00 por consulta.

   Seu Carlos faz, em média, 8 consultas por mês. Qual dos dois planos é mais vantajoso para ele e qual a diferença final de gastos mensais com plano de saúde?

   a) Plano 2, com diferença de 100 reais

   b) Plano 2, com diferença de 50 reais

   c) Plano 1, com diferença de 8 reais

   d) Plano 1, com diferença de 100 reais

   e) Plano 1, com diferença de 50 reais

8. Resolva as seguintes inequações:

   (a) $2x + 3 \geq 4$

   (b) $-4x + 2 \geq -1$

   (c) $-x + 1 < 5$.

9. Considere a função $f(x) = 4x + 30$. Determine todos os valores x tais que $f(x) > 10$.

10. Considere a função $f(x) = -2x - 5$. Determine todos os valores x tais que a função f assume valores positivos.

3.5 Função do Segundo Grau

Definição 3.10

Toda função que tem expressão da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma função do segundo grau, onde a, b, c são números reais fixos $a \neq 0$.

Exercício 3.7

Exemplos: Verifique quais são funções do segundo grau:

1. $f(x) = -2x^2 - 2$
2. $f(x) = x^2$
3. $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$
4. $f(x) = x^4 + 1$
5. $f(x) = \frac{1}{x^2} + 2x$.

O gráfico de qualquer função do segundo grau é uma parábola, como mostrado na Figura 3.9:

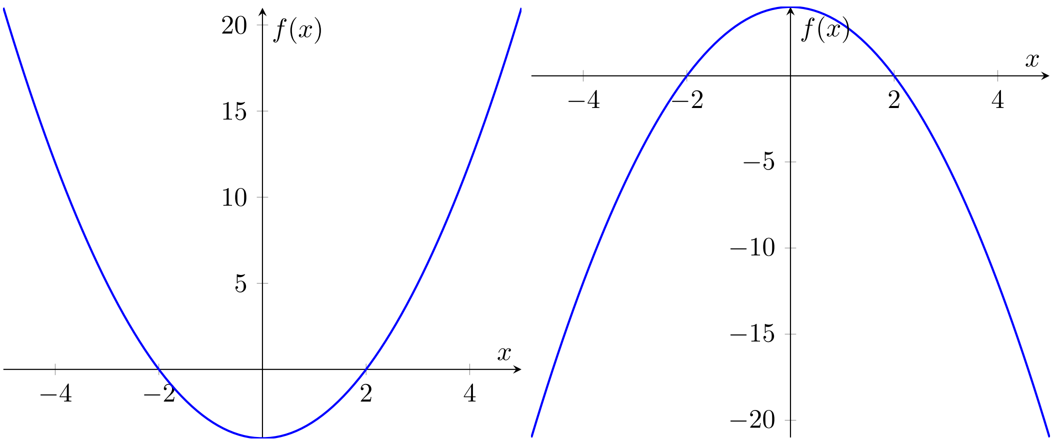


Figura 3.9: Parábola

Para determinarmos o desenho da parábola, necessitamos indicar os seguintes pontos:

1. Intersecção com o eixo das ordenadas.
2. Concavidade (para cima ou para baixo).
3. Raízes da função.
4. Vértice da parábola.

Começamos pelo mais fácil, que é a intersecção com o eixo das ordenadas. Para isto, fixemos uma função do segundo grau $f(x) = ax^2 + bx + c$. Para encontrar a intersecção, basta calcular a função no ponto $x = 0$. É fácil ver que o resultado é $f(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$. Logo, o gráfico da função encontra o eixo das ordenadas no ponto $(0, c)$.

Agora, vamos estudar a concavidade da função. Como mostrados na Figura 3.9, o gráfico da função de segundo grau pode ter a forma de U (nesse caso dizemos concavidade para cima) ou a forma de um U invertido (nesse caso, dizemos concavidade para baixo). Para decidir qual a concavidade da função, basta olharmos o sinal do número a:

1. Se $a > 0$, então $f(x)$ tem a concavidade para cima.

2. Se $a < 0$, então $f(x)$ tem a concavidade para baixo.

Para encontrarmos as raízes da função, basta igualar a função a zero. Assim, temos uma equação do segundo grau

$$ax^2 + bx + c = 0$$

que pode ser resolvida pelos métodos estudados na Seção 2.2. Observe que encontrar as raízes de uma função é o equivalente a encontrar os pontos onde o gráfico da função intersecta o eixo da abcissas. Assim, pode ocorrer de não existir tais pontos.

Por fim, determinamos o vértice da parábola: O vértice da parábola é o ponto de coordenadas (x_v, y_v) no gráfico da função de segundo grau que representa o menor valor (caso em que $a > 0$) ou o maior valor (caso em que $a < 0$) da função. Os valores do vértice são dada por:

$$x_v = \frac{-b}{a} \text{ e } y_v = \frac{-\Delta}{4a}.$$

Vamos olhar todas essas etapas na construção do gráfico no seguinte exemplo:

Exemplo 61. *Vamos fazer um esboço do gráfico da função $f(x) = x^2 - 5x - 6$. Primeiramente, verificamos que f é uma função do segundo grau, logo seu gráfico deve ser uma parábola.*

1. *Intersecção com o eixo das ordenadas: O ponto de intersecção tem coordenadas $(0, -6)$.*

2. *Concavidade (para cima ou para baixo): Observe que $a = 1 > 0$. Logo o gráfico é uma parábola com concavidade para cima.*

3. *Raízes da função: Para encontrar as raízes, igualamos a função a zero. Obtemos assim a equação de segundo grau*

$$x^2 - 5x - 6 = 0.$$

   Resolvendo pelos métodos da Seção 2.2, obtemos

   (a) $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 + 24 = 49.$

   (b) $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2 \times 1} = \frac{5 \pm 7}{2}$. *Assim* $x_1 = 6$ *e* $x = -1$ *são as raízes da função.*

4. *Vértice da parábola: Para determinarmos o vértice da parábola, calculamos* $x_v = \frac{5}{2 \times 1} = \frac{5}{2}$ *e* $y_v = \frac{-49}{4 \times 1} = \frac{-49}{4}$.

Temos assim todos os pontos importantes do gráfico da função do segundo grau, e podemos finalmente desenhar a parábola, como mostrado na Figura 3.10.

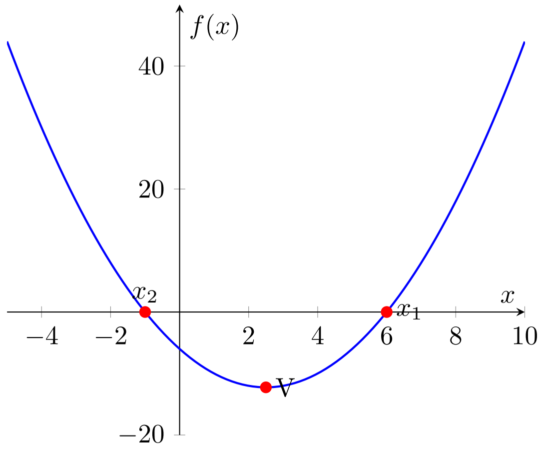


Figura 3.10: Gráfico da Função $f(x) = x^2 - 5x - 6$

Exemplo 62. *Vamos fazer um esboço do gráfico da função $f(x) = -x^2 - 1$. De forma análoga ao exemplo anterior, podemos encontrar que o gráfico encontra o eixo das ordenadas no ponto $(0, -1)$ e que a parábola tem concavidade para baixo.*

No entanto, para encontrar as raízes da função, ou seja, no momento de encontrar as raízes da equação $-x^2-1 = 0$, obtemos um valor de $\Delta = -4$, ou seja negativo. Assim, não existem raízes reais para a equação, e, portanto, a função não possui raízes reais. Isso significa que o gráfico da função não intersecta o eixo das abcissas, ou seja, o gráfico deve ficar abaixo do eixo das abcissas, ou acima. Como a concavidade da função é para baixo, concluímos que o gráfico da função deve ficar completamente abaixo do eixo das abcissas. Em outras palavras, a função assume apenas valores negativos. Para concluir, podemos ainda calcular o vértice da parábola e obter $x_b = 0$ e $y_v = -1$. A Figura 3.11 mostra o gráfico finalizado da função.

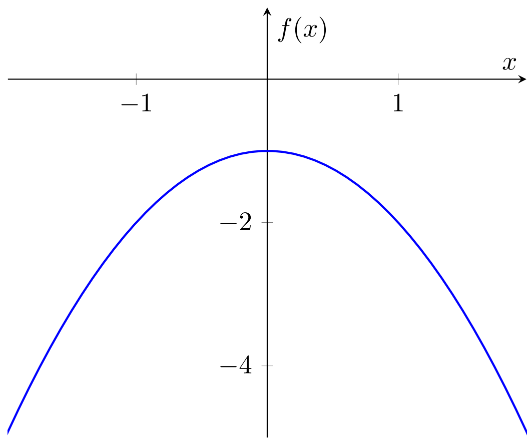


Figura 3.11: Gráfico da Função $f(x) = -x^2 - 1$

3.5.1 Inequações do Segundo Grau

Considere uma função do segundo grau $f(x) = ax^2 + bx + c$. Vamos determinar o sinal da função f, ou seja, os valores para os quais a função assume valor positivo e os valores para os quais a função assume valores negativos. De forma geométrica, queremos encontrar os pontos do gráfico da função de f que ficam acima do eixo das abcissas, e os pontos nos quais a função fica abaixo do eixo das abcissas.

Para isso, basta encontrar o conjunto S dos pontos x tais que $f(x) > 0$. Por simetria, os pontos em $\mathbb{R} \setminus S$ são os pontos nos quais temos $f(x) \leq 0$.

Da inequação $f(x) > 0$ obtemos a inequação

$$ax^2 + bx + c > 0$$

que é uma inequação do segundo grau. Para encontrar a solução dessa inequação, vamos utilizar o gráfico da função f.

Vamos fazer isso no seguinte exemplo:

Exemplo 63. *Vamos encontrar o conjunto solução da inequação $x^2 - 7x + 6 > 0$. Para isso, vamos pensar no gráfico da função $f(x) = x^2 - 7x + 6$. A Figura 3.12 mostra o gráfico da função.*

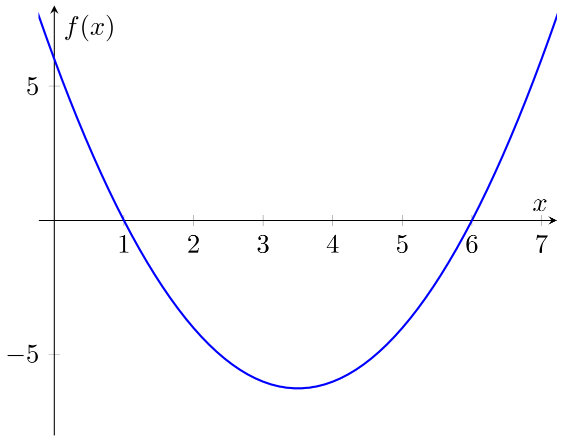


Figura 3.12: Gráfico da Função $f(x) = x^2 - 7x + 6$

Observe que para valores x entre as raízes $x_1 = 1$ e $x_2 = 6$, a função $f(x)$ retorna valores negativos, pois nessa região o gráfico da função esta abaixo do eixo das abcissas. Por outro lado, para valores x tais que $x < 1$ ou $x > 6$, a função retorna valores positivos, pois o gráfico da função nesses pontos esta acima do eixo das abcissas. Concluímos assim que o conjunto solução de $x^2 - 7x + 6 > 0$ são todos os pontos x tais que $x < 1$ ou $x > 6$. Mais precisamente, nosso conjunto solução é

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x < 1 \textit{ ou } x > 6\}$$

É de grande auxilio resolver uma equação do segundo grau valendo-se do gráfico de uma função do segundo grau. Na Tabela 3.2 sumarizamos os possíveis resultados para a inequação da forma $ax^2+bx+c > 0$.

$ax^2 + bx + c > 0$			
a	Δ	Solução	obs
$a > 0$	$\Delta > 0$	$S = \{x : x < x_1 \text{ ou } x > x_2\}$	x_1, x_2 raízes
	$\Delta = 0$	$S = \{x : x \neq x_1\}$	x_1 única raíz
	$\Delta < 0$	$S = \mathbb{R}$	
$a < 0$	$\Delta > 0$	$S = \{x : x_1 < x < x_2\}$	x_1, x_2 raízes
	$\Delta = 0$	$S = \emptyset$	
	$\Delta < 0$	$S = \emptyset$	

Tabela 3.2: Solução para $ax^2 + bx + c > 0$

Exercício 3.8

Complete a Tabela 3.3.

$ax^2 + bx + c \leq 0$			
a	Δ	Solução	obs
$a > 0$	$\Delta > 0$		
	$\Delta = 0$		
	$\Delta < 0$		
$a < 0$	$\Delta > 0$		
	$\Delta = 0$		
	$\Delta < 0$		

Tabela 3.3: Solução para $ax^2 + bx + c \leq 0$

3.5.2 Exercícios

1. Faça o esboço dos gráficos das seguintes funções:

   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 8x + 15$.

   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x^2 + 5x - 5$.

   (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$.

2. Encontre as soluções para as seguintes inequações:

   (a) $x^2 - 4x + 4 \geq 0$

   (b) $2x^2 + 3x - 5 \leq 0$

   (c) $3x^2 - 6x + 3 \geq 0$

   (d) $x^2 + 7x + 12 \leq 0$

   (e) $-x^2 + 6x - 9 \geq 0$

   (f) $x^2 - 4 \geq 0$.

   (g) $x^2 - 5x + 10 \geq 0$.

   (h) $(x - 2)(x + 7) > 0$.

3. Faça um esboço da função $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$.

3.6 Funções Polinomiais

Podemos pensar que as funções polinomiais são uma extensão das funções de primeiro e segundo grau.

Definição 3.11

Uma função polinomial é uma função com expressão da forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

onde $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ são números reais fixos.

Exemplo 64. *As seguintes funções são exemplos de funções polinomiais:*

1. $f(x) = 2x^2 + 2x - 1$.
2. $f(x) = x - 2$.
3. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 2$.
4. $f(x) = x^6 + x^5 - 2x$.

Definição 3.12

O **grau de um polinômio** é a maior potência que aparece em sua expressão.

Exercício 3.9

Considere a função polinomial

$$f(x) = -2x^4 + 3x^3 - x + 1$$

1. Qual o grau do polinômio?
2. Qual o coeficiente de x^4 ? (o número que acompanha x^4)
3. Qual o coeficiente de x^2 ?

Exercício 3.10

O que é um polinômio de grau zero?

Exercício 3.11

Determine o grau da função polinomial $f(x) = 2x - 1$.

Dica: Lembre que $x = x^1$.

Para funções polinomiais em geral, ficará mais fácil fazer um esboço do gráfico da função com os métodos que serão desenvolvidos na disciplina de Cálculo 1. A Figura 3.13 fornece alguns exemplos de gráficos de funções polinomiais.

Vamos estudar operações entre polinômios. A ideia é generalizar as operações algébricas que realizamos com números reais para os polinômios.

Começamos com a operação de adição:

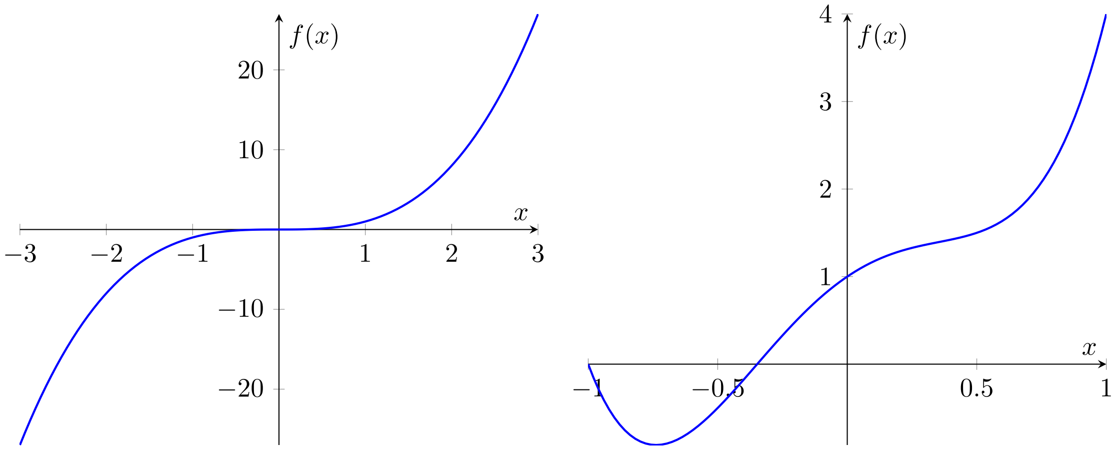


Figura 3.13: Gráfico das Funções $f(x) = x^3$ (direita) e $f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 2x + 1$ (esquerda)

Definição 3.13

Considere duas funções polinomiais $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ e $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \cdots + b_1 x + b_0$ definidas no mesmo domínio D. Então $p + q$ é uma função polinomial definida em D de grau menor ou igual que $max\{n, m\}$ e definida por $(p + q)(x) = p(x) + q(x)$

De forma simplificada, a função $p + q$ associa a cada elemento x, o número $p(x) + q(x)$. Vamos observar agora que podemos encontrar a expressão polinomial que define $p + q$. Vamos começar com o seguinte exemplo:

Exemplo 65. . *Considere* $p(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 1$ *e* $q(x) = 2x^4 - x^3 + 2x + 5$. *Vamos obter a expressão da função* $p + q$. *Temos por definição que*

$$(p + q)(x) = p(x) + q(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 1 + 2x^4 - x^3 + 2x + 5$$

Agora, vamos reescrever a expressão acima da seguinte forma:

$$(p + q)(x) = 2x^4 + 3x^3 - x^3 + 2x^2 - x + 2x + 1 + 5$$

ou seja, apenas agrupamos as potências de mesmo grau. Agora, com as potências de mesmo grau, podemos somar/subtrair os coeficientes, obtendo assim

$$(p + q)(x) = 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6$$

que é a expressão do polinômio $p + q$.

Exemplo 66. *Se* $p(x) = -3x^5 + 2x^3 + 2$ *e* $q(x) = 4x^6 - 5x^5 + 1$, *então*

$$p(x) + q(x) = 4x^6 - 8x^5 + 2x^3 + 3$$

Importante!!! Nunca somar/subtrair coeficientes de potências distintas.

$$2x^5 + 4x^3 \neq 6x^?$$

A operação de subtração de polinômios é realizada de maneira análoga, lembrando apenas que se $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \cdots + b_1 x + b_0$ então $-q(x) = -b_m x^m + -b_{m-1}x^{m-1} - b_{m-2}x^{m-2} - \cdots - b_1 x - b_0$

Exemplo 67. *Se* $p(x) = -3x^5 + 2x^3 + 2$ *e* $q(x) = 4x^6 - 5x^5 + 1$, *então*

$$p(x) - q(x) = -3x^5 + 2x^3 + 2 - 4x^6 + 5x^5 - 1 = -4x^6 + 2x^5 + 2x^3 + 1$$

Exercício 3.12

Se p é polinômio de grau 5 e q é polinômio de grau 5, então $p + q$ é sempre um polinômio de grau 5? Forneça um contra-exemplo.

Exercício 3.13

Realize as operações:

1. $(2x^3 - 4x) + (-3x^5 + 6x^3 + 4) =$

2. $(x^5 - 7x^4 + x) - (4x^7 - 2x^3 + 6) =$

3. $(x^3 + 4x^2 - x) + (x^5 - 3x^2) - (x^4 + 2) =$

Vamos agora estudar a multiplicação de polinômios.

Definição 3.14

Considere duas funções polinomiais $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ e $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \cdots + b_1 x + b_0$ definidas no mesmo domínio D. Então pq é uma função polinomial definida em D de grau $n \times m$ e definida por $(pq)(x) = p(x) \times q(x)$

Vamos novamente obter a expressão de pq. Para isso, lembramos que na multiplicação de $x^j \times x^l$, conservamos[2] a base e somamos os expoentes. Assim

$$x^j \times x^l = x^{j+l}$$

Exemplo 68.

$$2x^4 \times 3x^2 = 2 \times 3 \times x^4 \times x^2 = 6x^{4+2} = 6x^6$$

Agora, para obter a expressão da multiplicação de dois polinômios, basta aplicar a distributiva e usar a propriedade acima. Faremos isso com um exemplo:

Exemplo 69. *Se* $p(x) = -3x^5 + 2x^3$ *e* $q(x) = 4x^6 - 5x^5$, *então*

$$(pq)(x) = p(x) \times q(x) = (-3x^5 + 2x^3) \times (4x^6 - 5x^5)$$

[2]Para uma revisão de potências, ver Seção 3.7.1

Agora, aplicamos a distributiva na ultima parte, ou seja, cada elemento do primeiro parêntesis, multiplica cada elemento do último parêntesis. Assim

$$\begin{aligned}(-3x^5+2x^3)\times(4x^6-5x^5) &= -3x^5\times 4x^6-3x^5\times(-5x^5)+2x^3\times 4x^6+2x^3\times(-5x^5)\\ &= -12x^{11}+15x^{10}+8x^9-10x^8\end{aligned}$$

Logo

$$(pq)(x)=-12x^{11}+15x^{10}+8x^9-10x^8$$

Exercício 3.14

Realize as operações:

1. $(2x^3-4x)\times(-3x^5)=$
2. $(x^5-7x^4+x)\times(4x^7-2x^3)=$
3. $(x^3+4x^2)\times(x^5-3x^2-1)=$

Vamos concluir essa seção com a operação de divisão entre polinômios. Começamos com a seguinte definição:

Definição 3.15

Uma função racional é uma função com expressão da forma $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios.

Exemplo 70. .

1. $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$.

2. $f(x)=\frac{x^4+2x^3-x+1}{2x^5+2}$.

3. $f(x)=\frac{-3}{x^2+6}$.

Observe que uma função racional $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ esta definida apenas para os valores $x\in\mathbb{R}$ tais que $Q(x)\neq 0$, ou seja, para todos os valores x que não são raízes de $Q(x)$.

Podemos executar a divisão de um polinômio $P(x)$ por um polinômio $Q(x)$ se o grau do polinômio $P(x)$ for maior ou igual ao grau do polinômio $Q(x)$. O processo de divisão neste caso é análogo ao processo de divisão inteira.

No entanto, vamos nos concentrar na divisão de polinômios por polinômios da forma $Q(x)=x-a$. Essa escolha se deve ao fato que essas divisões são as que mais aparecem em Cálculo.

No caso da divisão de um polinômio por um polinômio de grau um, vamos utilizar o método de Briot-Ruffini. Esse método é aplicado para realizar a divisão de polinômios $\frac{P(x)}{Q(x)}$ onde:

1. $P(x)$ é polinômio de grau maior ou igual a 1.

2. $Q(x)$ é polinômio de grau igual a 1.

O método consiste na construção de uma tabela. Vamos dividir um polinômio

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

por $Q(x) = (x - a)$ usando este método.

Primeiramente, construímos a seguinte tabela

a	$\mid$	a_0	a_1	a_2	$\ldots$	a_n
					$\ldots$	

Onde na primeira coluna, esta o número a (do polinômio $Q(x) = x - a$). Nas colunas seguintes, adicionamos os coeficientes do polinômio $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$. Por fim, vamos completar a segunda linha. Para isso, começamos na segunda coluna (valor q_0), e sucessivamente vamos completando as outras colunas até chegar o valor r.

a	$\mid$	a_0	a_1	a_2	$\ldots$	a_n
		q_0	q_1	q_2	$\ldots$	r

onde $q's$ são os coeficientes da divisão e r é o resto e são definidos por

1. $q_0 = a_0$.
2. $q_1 = a_1 + aq_0$.
3. $\vdots$
4. $q_{n+1} = a_{n+1} + aq_n$.

Com a tabela completa, podemos escrever $P(x) = Q(x)D(x)+r$, onde $D(x) = (q_0x^{n-1}+q_1x^{n-2}+\cdots+q_{n-1})$ é o resultado da divisão e r é o resto da divisão.

Exemplo 71. *Considere $P(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ e $Q(x) = x - 2$. Vamos realizar a divisão $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Temos que a tabela nesse caso é:*

2	$\mid$	5	-2	3	-1
		5	8	19	37

Logo o resultado da divisão é $D(x) = 5x^2 + 8x + 19$ com resto $r = 37$.

Exemplo 72. *Vamos realizar a divisão do polinômio $P(x) = 4x^4 + x$ pelo polinômio $Q(x) = x - 2$. Observemos primeiro que antes de utilizar o método de Briott-Ruffini, devemos lembrar que todas as potências menores que 4 (grau do polinômio $P(x)$) que não aparecem no polinômio $P(x)$, implica que essas potências tem coeficiente de valor 0,* ***que deve ser adicionado na tabela****. Para simplificar, podemos reescrever o polinômio $P(x)$ da forma*

$$P(x) = 4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + x + 0$$

Assim, completamos a tabela da seguinte forma:

2 |	4	0	0	1	0
	q_0	q_1	q_2	q_3	r

Deixamos a cargo do leitor completar a tabela.

Exemplo 73. *Em muitas situações, o polinômio $Q(x)$ pode ter uma forma distinta de $x - a$. Nessas situações, devemos fazer algumas alterações. Vamos observar alguns exemplos:*

1. *Se $Q(x) = x+2$, então reescrevemos $Q(x) = x-(-2)$. Logo, devemos escrever -2 na primeira coluna.*

2. *Se $Q(x) = 2x - 2$, novamente, vamos reescrever $Q(x) = 2(x - 1)$. Assim, fazemos a divisão usando o polinômio $x - 1$.Por fim, dividimos o polinômio $D(x)$ pelo valor 2.*

Exercício 3.15

Executar o método de Briot-Ruffini nos seguintes casos:

1. $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 7$ e $Q(x) = (x - 2)$

2. $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 8x + 4$ e $Q(x) = (x + 1)$

3. $P(x) = 4x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 6x + 9$ e $Q(x) = (x - 3)$.

4. $P(x) = 3x^4 + 2x^3 - 2x + 4$ e $Q(x) = 3x - 3$.

Vamos finalizar essa seção com um resultado importante para verificar se a divisão foi realizada de forma correta:

Proposição 74. *Considere o polinômio $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ e o polinômio $Q(x) = x - a$. Então o resto da divisão de $P(x)$ por $Q(x)$ é igual a $P(a)$.*

Demonstração. Considere a divisão do polinômio $P(x)$ pelo polinômio $Q(x)$ dada por

$$P(x) = Q(x)D(x) + r$$

Então $P(a) = Q(a)D(a) + r$. Como a é uma raiz do polinômio $Q(x) = x - a$, concluímos que

$$P(a) = Q(a)D(a) + r = r$$

□

3.6.1 Inequações Envolvendo Quociente de Funções

Nesta seção vamos estudar as inequações envolvendo quociente de funções, ou seja, inequações da forma $\frac{f(x)}{g(x)}$. O estudo das soluções dessas inequações, ou seja, do estudo do sinal, envolve o estudo do sinal das funções $f(x)$ e $g(x)$ separadamente e depois utilizando as regras de sinais.

Vamos realizar o estudo do sinal de funções racionais, mas lembrando que o processo é o mesmo no caso de outras funções não polinomiais.

Exemplo 75. *Considere a função racional* $Q(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+2}$*. Vamos estudar o sinal de* $Q(x)$*, ou seja, descobrir para quais valores de* x *a expressão* $Q(x)$ *resulta em um número positivo e para quais valores retorna um valor negativo.*

Vamos primeiramente estudar os sinais separadamente de $x-1$ *e* x^2-3x+2*. Começamos com* $x-1$*. Da Seção 3.4.2, sabemos que* $x-1 \geq 0$ *se e somente se* $x \geq 1$*. Podemos representar o sinal da expressão* $x-1$ *na Figura 3.14.*

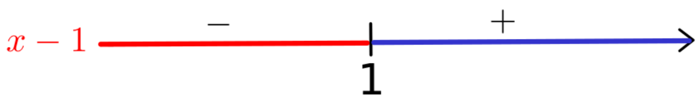


Figura 3.14: Sinal de $x-1$

Na Figura 3.14, indicamos que para valores x *a direita de 1 (a parte azul), a expressão* $x-1$ *toma valores positivos, enquanto que para valores* x *a esquerda de 1 (a parte vermelha), a expressão* $x-1$ *retorna valores negativos.*

Vamos realizar o mesmo procedimento para a expressão x^2-3x+2*. Da Seção 3.5.1, sabemos que a expressão* x^2-3x+2 *retorna valores negativos para* x *entre* 1 *e* 2*, e para valores maiores que 2 ou menores que 1, a expressão retorna valores positivos. A Figura 3.15 mostra o sinal da expressão* x^2-3x+2

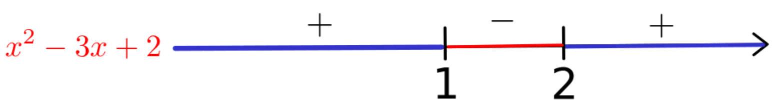


Figura 3.15: Sinal de x^2-3x+2

Com o estudo do sinal de $x-1$ *e* x^2-3x+2*, podemos realizar o estudo do sinal de* $Q(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+2}$*. Para isso, basta usar as regras de sinais. A Figura 3.16 mostra a construção do sinal.*

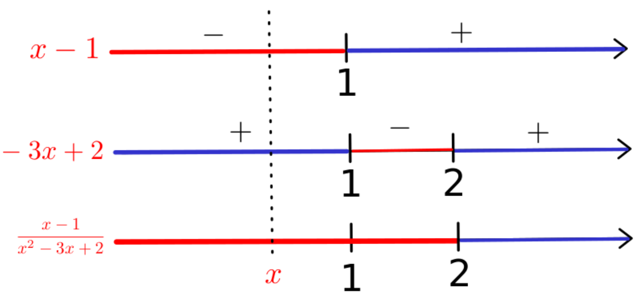


Figura 3.16: Sinal de $\frac{x-1}{x^2-3x+2}$

Para construir a última reta da Figura 3.16 basta lembrar que uma divisão $\frac{a}{b}$ *é positiva se, e somente se,* a *e* b *tem o mesmo sinal. Em caso contrário, o sinal de* $\frac{a}{b}$ *é negativo. Assim, como exemplo, observe na Figura 3.16 o valor* x*. Observamos que na primeira reta, o valor que assume é negativo, enquanto que na segunda reta, o valor é positivo. Logo, na divisão, o valor resultante é negativo. Raciocinando de forma análoga, chegamos a conclusão da última reta, que é o sinal da expressão* $\frac{x-1}{x^2-3x+2}$*. Assim a expressão* $\frac{x-1}{x^2-3x+2}$ *assume valores positivos se* $x > 2$ *e assume valores negativos se* $x < 2$*.*

Observe que a expressão $\frac{x-1}{x^2-3x+2}$ não esta definida para $x = 1$ e $x = 2$.

Exemplo 76. *O estudo de sinal da expressão $\frac{x^2-6x+5}{x^2-7x+12}$ é dado na Figura 3.17*

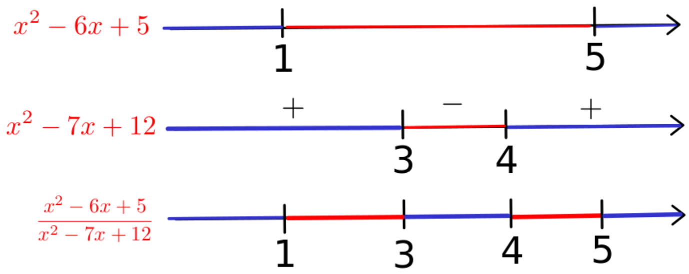


Figura 3.17: Sinal de $\frac{x^2-6x+5}{x^2-7x+12}$

3.6.2 Exercícios

1. Dado os polinômios $P(x) = 2x^3 - 4x + 5$ e $Q(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x + 1$, encontre:

   (a) $(P + Q)(x)$

   (b) $(P - Q)(x)$

2. Multiplique os polinômios $R(x) = x^2 + 2x + 1$ e $S(x) = x - 3$.

3. Executar o método de Briot-Ruffini nos seguintes casos:

   (a) $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 7$ e $Q(x) = (x - 2)$

   (b) $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 8x + 4$ e $Q(x) = (x + 1)$

   (c) $P(x) = 4x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 6x + 9$ e $Q(x) = (x - 3)$.

   (d) $P(x) = 5x^4 - 4x^2 + 9$ e $Q(x) = (x + 2)$.

   (e) $P(x) = 6x^3 + 5x^2 - 2x + 1$ e $Q(x) = 2x - 2$.

   (f) $P(x) = 9x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 3x + 7$ e $Q(x) = x + 3$.

   (g) $P(x) = 7x^5 + 2x^4 - x^3 + 4x^2 - 5x + 10$ e $Q(x) = 3x - 12$.

4. Considere $P(x) = x^3 + 2x - 3$ e $Q(x) = x - 2$. Determine o resto da divisão de $P(x)$ por $Q(x)$.

5. Faça o estudo de sinal das seguintes funções racionais:

   (a) $Q(x) = \frac{x}{2x-1}$.

   (b) $Q(x) = \frac{x}{x^2-1}$.

   (c) $Q(x) = \frac{x^2-2x+2}{x^2+7x+12}0$.

   (d) $Q(x) = \frac{x-1}{x^2-4x+4}$

3.7 Função Exponencial

3.7.1 Potências

Dado um número real a e um inteiro positivo n, definimos

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{\text{n vezes}}$$

O número a é chamado de base e n é denominado de expoente.

Exemplo 77.

1. $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$.
2. $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$.
3. $5^2 = 5 \times 5 = 25$.
4. $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$.
5. $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$.

Por convenção definimos $a^1 = a$ e $a^0 = 1$ para todo real a.

Exercício 3.16

Calcule

1. $6^3 =$
2. $7^2 =$
3. $(-8)^3 =$
4. $0^{10} =$
5. $1^5 0 =$
6. $(-1)^{23} =$
7. $(4 - \frac{1}{3})^{2-\frac{4}{2}} =$

Exercício 3.17

Deduza as seguintes propriedades:

1. Se $a > 0$ então $a^n > 0$ para número inteiro positivo n.
2. Se $a < 0$ então:
   (a) Se n é par, então $a^n \geq 0$ (temos igualdade quando $n = 0$, e neste caso, $a^n = 0$).
   (b) Se n é impar, então $a^n < 0$.

Vamos agora definir a potência de números reais por inteiros negativos. Dado um real não nulo $a > 0$ e um inteiro negativo $-n$, definimos

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemplo 78.

1. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

2. $(-3)^3 = \frac{1}{(-3)^3} = \frac{1}{-27} = -\frac{1}{27}$.

3. $4^{-4} = \frac{1}{4^4} = \frac{1}{256}$.

Exemplo 79. *Calcule:*

1. $(-2)^{-1} =$

2. $3^{-2} =$

3. $1^{-20} =$

4. $(-5)^{-3} =$

O seguinte resultado fornece algumas propriedades das potências:

Teorema 80. *Se $a, b \in \mathbb{R}$, e m, n são números inteiros, então:*

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

2. $(a \times b)^m = a^m \times b^m$.

3. $(a^m)^n = a^{m \times n}$.

Demonstração. Vamos indicar a prova da propriedade 1. Deixamos para o leitor as demais demonstrações.

$$a^m \times a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{\text{m vezes}} \times \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{\text{n vezes}} = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{\text{m + n vezes}} = a^{m+n}$$

□

Exercício 3.18

Simplifique as expressões:

1. $2^4 \times 2^3 = 2^{4+3} = 2^7$ (Exemplo. Não é necessário calcular a potência).

2. $3^3 \times 3^5 =$

3. $(5 \times 2)^2 =$

4. $\frac{6^3}{3^3} =$ (Dica. Observe que $6 = 2 \times 3$).

5. $\frac{27^3}{3^3} =$

Até o momento, sabemos como calcular a expressão a^n para n qualquer número inteiro. Antes de estender para potências com expoentes racionais, vamos primeiro definir a noção de radiciação.

Dado um número real positivo a e n um inteiro positivo, dizemos que

$$\sqrt[n]{a} = b$$

se, e somente se $b^n = a$. Nesse caso, dizemos que $b = \sqrt[n]{a}$ é a raiz-enésima de a. Denominamos a de radicando e n de índice. Podemos pensar na operação $\sqrt[n]{a}$ como a operação inversa da potenciação a^n.

Exemplo 81.

1. $\sqrt[2]{4} = 2$, *pois* $2^2 = 2$.

2. $\sqrt[3]{64} = 4$, *pois* $4^3 = 64$.

Das propriedades da potenciação, observe que

1. Se a é um número real negativo e n é inteiro positivo, então a^n é positivo. Assim, $(-2)^2 = 4$. Logo, é correto afirmar também que $\sqrt[2]{4} = -2$. Nesses casos, usamos a notação $\sqrt[2]{4} = \pm 2$.

2. Para números negativos, também podemos definir a radiciação se o índice n é impar. Por exemplo, sabemos que $(-3)^3 = -27$. Assim, faz sentido definir $\sqrt[3]{-27} = -3$.

3. A raiz $\sqrt[2]{\cdot}$ é muito usada (por exemplo, no estudo de equações de segundo grau da Seção 2.2). Assim, por convenção usamos a notação $\sqrt{\cdot}$ ao invés de $\sqrt[2]{\cdot}$ para a raiz de índice 2, também conhecida como raiz quadrada.

Exercício 3.19

Calcule:

1. $\sqrt[2]{64} =$

2. $\sqrt[4]{16} =$

3. $\sqrt[2]{9} =$

4. $\sqrt{49} =$

5. $\sqrt[5]{-1} =$.

Por definição, se $a > 0$ então temos que

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

Assim, podemos pensar na operação de radiciação $\sqrt[n]{a}$ como sendo a potenciação $a^{\frac{1}{n}}$. Com essa definição, todas as operações de potenciação ainda são satisfeitas e podemos ainda definir a potenciação por um racional qualquer da seguinte forma:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Exemplo 82.

$$2^{\frac{6}{2}} = \sqrt[2]{2^6} = \sqrt[2]{64} = \pm 8$$

Exercício 3.20

Calcule:

1. $3^{\frac{4}{2}} =$

2. $25^{\frac{1}{2}} =$

Exemplo 83. *Observe que, usando a conversão de radiciação e potenciação e as propriedades de potenciação, podemos simplificar a seguinte expressão:*

$$\sqrt[5]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[5]{2^{\frac{1}{4}}} = (2^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{20}} = \sqrt[20]{2}$$

Exercício 3.21

Simplifique as expressões (escreva usando apenas uma radiciação)

1. $\sqrt[3]{\sqrt{5}} =$

2. $\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{4}}} =$

3. $(2^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{2}} =$

Podemos continuar e estender a definição de potências para expoentes irracionais. Tal processo é justificado através de elementos de Cálculo. Vamos aqui assumir que dado um real positivo a, e um número irracional α, existe um único número real r, que chamaremos de potência de base a e expoente α e vamos denotar tal número por a^α.

Vamos concluir essa seção com um sumário de resultados que valem para a potenciação (e portanto, para a radiciação) de números reais.

Teorema 84. *Sejam a, b reais positivos, c, d números reais. Então:*

1. $a^c a^d = a^{c+d}$.

2. $(ab)^c = a^c b^c$.

3. $(a^c)^d = a^{cd}$.

4. $\frac{a^c}{a^d} = a^{c-d}$.

3.7.2 Função Exponencial

Dado um número real positivo a, com $a \neq 1$, definimos a função exponencial com base a como sendo a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = a^x$.

Exemplo 85. *Considere a função exponencial $f(x) = 3^x$. Vamos calcular a função em alguns pontos.*

1. *Se $x = 0$, então $f(0) = 3^0 = 1$.*

2. *Se $x = 2$, então $f(2) = 3^2 = 9$.*

3. *Se* $x = -3$, *então* $f(-3) = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$.

As seguintes observações nos ajudam a entender o comportamento de uma função exponencial e, portanto, como desenhar seu gráfico.

Considere a função exponencial $f(x) = a^x$.

1. Observe que pelas propriedade de potências, $a^x > 0$ para todo x real. Assim $img(f) = \mathbb{R}_+^*$, o conjunto dos números reais positivos. Logo o gráfico de uma função exponencial não encontra o eixo das abcissas (eixo $0x$).

2. Se $a > 1$, temos que $a^x < a^y$ se $x < y$, ou seja, f é uma crescente. Por outro lado, se $0 < x < 1$, então $a^x > a^y$ se $x < y$, ou seja, f é uma função decrescente.

3. $f(0) = a^0 = 1$. Assim, o ponto $(0, 1)$ sempre pertence ao gráfico da função exponencial. É o ponto onde o gráfico da função encontra o eixo das ordenadas (eixo $0y$).

4. Se $a > 1$, então a medida que o valor de x cresce positivamente, o valor da função $f(x)$ cresce. Para valores negativos, o valor da função fica cada vez mais próximo de zero. Se $a < 1$, a situação é oposta. Essa observação segue do fato de $f(x)$ ser crescente/decrescente se $a > 1$ ou $0 < a < 1$.

Exemplo 86. *Considere a função exponencial* $f(x) = 4^x$. *Sabemos que* $(0, 1)$ *pertence ao gráfico da função e como a base é 4, a função é crescente. Assim, para valores de* x *cada vez maiores, os valores da função ficam cada vez maiores. Exemplo:* $f(5) = 4^5$ *e* $f(100) = 4^{100}$.

Por outro lado, para valores de x *negativos, por exemplo* $x = -3$, *temos que*

$$f(-3) = 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64} = 0,0156$$

e quanto menores os valores, a função atinge valores cada vez menores

$$f(-5) = 4^{-5} = \frac{1}{4^5} = \frac{1}{1024} = 0,000976562$$

mas lembrando que são valores pequenos, mas sempre positivos.

A Figura 3.18 mostra o gráfico da função.

Observe como os valores da função ficam arbitrariamente grandes para x *positivo (a imagem acima representa apenas um corte do gráfico). Por outro lado, do lado esquerdo do eixo* $0x$, *ou seja, para valores negativos de* x, *os valores da função ficam cada vez mais próximos de zero, de tal forma que no gráfico até parece que o valor da função é zero. Mas, olhando com uma lupa, podemos ver que esses valores são pequenos, mas sempre maiores que zero. A Figura 3.19 mostra um zoom na região entre -3 e -2:*

Exemplo 87. *Vamos olhar agora um exemplo com base entre* 0 *e* 1. *Tomemos como exemplo* $f(x) = 0.5^x$. *As mesmas analises se aplicam a este caso, com o detalhe que agora estamos trabalhando com base* 0.5. *Logo, a função é decrescente. Assim, para valores positivos de* x, *a função se aproxima do zero, enquanto para valores negativos, a função cresce indefinidamente. A Figura 3.20 representa o gráfico da função.*

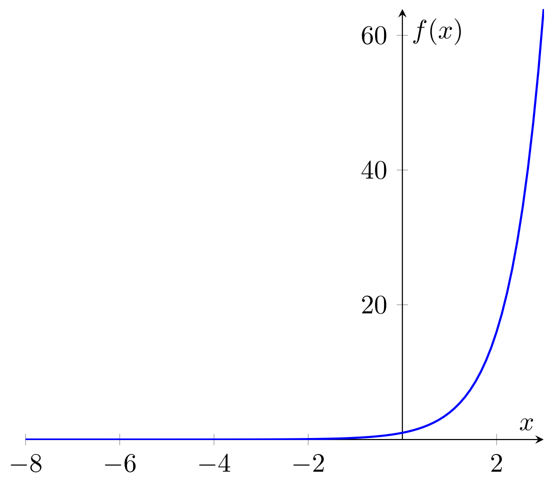


Figura 3.18: Gráfico da Função $f(x) = 4^x$

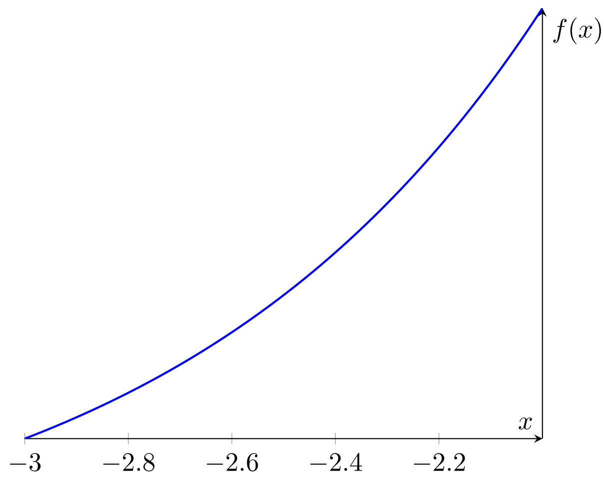


Figura 3.19: Gráfico da Função $f(x) = 4^x$

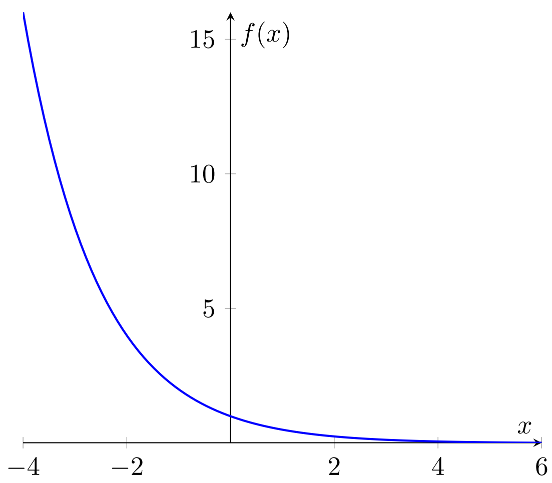


Figura 3.20: Gráfico da Função $f(x) = 0.5^x$

De um modo geral, temos as seguintes configurações para o gráfico de uma função exponencial: Suponha $f(x) = a^x$. Então o gráfico de f esta representado na Figura 3.21.

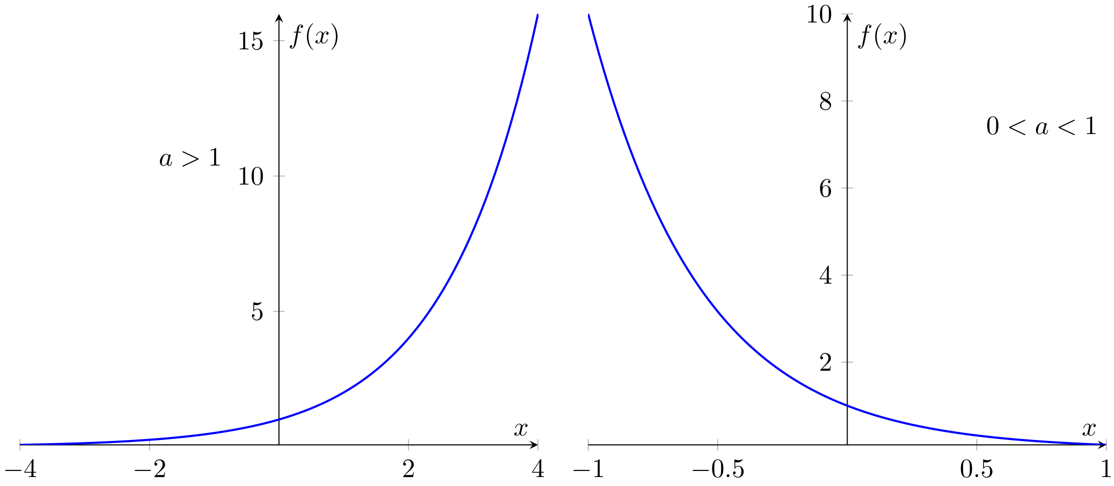


Figura 3.21: Gráfico da Função $f(x) = a^x$, para $a > 1$ (esquerda) e $0 < a < 1$ (direita)

Exercício 3.22

Faça o esboço do diagrama das seguintes funções exponenciais:

1. $f(x) = 3^x$.
2. $f(x) = 0.1^x$.
3. $f(x) = 6^x$.
4. $f(x) = 0.8^x$.

3.7.3 Exercícios

1. Calcule:

   (a) $6^3 =$

   (b) $7^2 =$

   (c) $(-8)^3 =$

   (d) $0^{10} =$

   (e) $1^50 =$

   (f) $(-1)^{23} =$

   (g) $(4 - \frac{1}{3})^{2-\frac{4}{2}} =$

2. Calcule

   (a) $(-2)^{-1} =$

   (b) $3^{-2} =$

   (c) $1^{-20} =$

   (d) $(-5)^{-3} =$

3. Simplifique as expressões:

(a) $2^4 \times 2^3 =$

(b) $3^3 \times 3^5 =$

(c) $(5 \times 2)^2 =$

(d) $\frac{6^3}{3^3} =$

(e) $\frac{27^3}{3^3} =$

(f) $\sqrt[3]{2^4} \times 2^6 =$

(g) $\frac{\sqrt[4]{5^2}}{25^2} =$

4. Calcule:

(a) $\sqrt[2]{64} =$

(b) $\sqrt[4]{16} =$

(c) $\sqrt[2]{9} =$

(d) $\sqrt{49} =$

(e) $\sqrt[5]{-1} =.$

5. Calcule:

(a) $3^{\frac{4}{2}} =$

(b) $25^{\frac{1}{2}} =$

6. Simplifique as expressões (escreva usando apenas uma radiciação)

(a) $\sqrt[3]{\sqrt{5}} =$

(b) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{4}}} =$

(c) $(2^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{2}} =$

7. Faça o esboço do diagrama das seguintes funções exponenciais:

(a) $f(x) = 3^x$.

(b) $f(x) = 0.1^x$.

(c) $f(x) = 6^x$.

(d) $f(x) = 0.8^x$.

8. Encontre o valor de

$$\sqrt[3]{3 + \sqrt{15 + \sqrt{36 + 4\sqrt{256}}}}$$

9. Simplifique as expressões abaixo:

(a) $2^3 \times 2^4 =$

(b) $\frac{4^2 3}{2^6} =$

(c) $(\sqrt[2]{6^4})^4 =$

(d) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt[2]{5}}} =$

10. Encontre o valor de x tal que

$$\sqrt[16]{2^8} = \sqrt[x]{2^4}$$

11. Faça um esboço do gráfico das seguintes funções:

(a) $f(x) = 2^x$.

(b) $f(x) = 0.2^x$.

12. Sabendo que $f(x)$ é uma função exponencial e que $f(1) = 3$, determine o valor de $f(3)$.

13. Calcule:

(a) $6^3 =$

(b) $7^2 =$

(c) $(-8)^3 =$

(d) $0^{10} =$

(e) $1^{50} =$

(f) $(-1)^{23} =$

(g) $(4 - \frac{1}{3})^{2-\frac{4}{2}} =$

14. Calcule

(a) $(-2)^{-1} =$

(b) $3^{-2} =$

(c) $1^{-20} =$

(d) $(-5)^{-3} =$

15. Simplifique as expressões:

(a) $2^4 \times 2^3 =$

(b) $3^3 \times 3^5 =$

(c) $(5 \times 2)^2 =$

(d) $\frac{6^3}{3^3} =$

(e) $\frac{27^3}{3^3} =$

(f) $\sqrt[3]{2^4} \times 2^6 =$

(g) $\frac{\sqrt[4]{5^2}}{25^2} =$

16. Calcule:

(a) $\sqrt[2]{64} =$

(b) $\sqrt[4]{16} =$

(c) $\sqrt[2]{9} =$

(d) $\sqrt{49} =$

(e) $\sqrt[5]{-1} =$.

17. Calcule:

(a) $3^{\frac{4}{2}} =$

(b) $25^{\frac{1}{2}} =$

18. Simplifique as expressões (escreva usando apenas uma radiciação)

(a) $\sqrt[3]{\sqrt{5}} =$

(b) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{4}}} =$

(c) $(2^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{2}} =$

3.8 Função Logarítmica

O índice pH é uma medida em química que mede a acidez e basicidade de uma solução. O índice varia em uma escala de 0 a 14 e pode ser obtida como sendo o **logaritmo** negativo da concentração molar de íons H_3O^+.

Nesta seção, vamos lembrar a definição e os principais resultados referentes a operação de logaritmos.

3.8.1 Logaritmo

Consideremos a seguinte pergunta: Fixados dois números reais a e b, com $a \neq 1$, qual deve ser o número c para que tenhamos $a^c = b$?

Para essa pergunta, existe um único número c, que vamos chamar de logaritmo de b na base a, e vamos denotá-lo por $\log_a b$. Assim

$$log_a b = c \Longleftrightarrow a^c = b$$

Dizemos que c é o logaritmo de b na base a.

Exemplo 88. *Vamos olhar alguns exemplos:*

1. $\log_2 8 = 3$, *pois* $2^3 = 8$.
2. $\log_3 81 = 4$, *pois* $3^4 = 81$.
3. $\log_7 343 = 3$, *pois* $7^3 = 343$.
4. $\log_5 0.04 = -2$, *pois* $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0.04$.

Observação 89.

1. *Observe que, no cálculo de* $\log_a b = c$*, os números* a *e* b *devem ser positivos, e ainda,* $a \neq 1$*. Por outro lado, o resultado, ou seja, o valor* c *pode ser negativo, como mostrado no exemplo acima.*
2. *A exigência de que* $a \neq 1$ *segue do fato de que não podemos definir algo como* $\log_1 10$*, pois* 1^c *é sempre igual a 1 para todo* c*, assim, não existe um* c *tal que* $1^c = 10$.

Exercício 3.23

Calcule:

1. $\log_2 16 =$
2. $\log 2\frac{1}{4} =$
3. $\log_5 5 =$
4. $\log_4 1 =$
5. $\log_2 \sqrt{2} =$

O próximo resultado fornece algumas observações que seguem da definição de logaritmos:

Teorema 90. *Sejam a, b reais positivos com $a \neq 1$ e c um número real qualquer. Então:*

1. $a^{\log_a b} = b$
2. $\log_a b^c = c \log_a b$
3. $\log_a 1 = 0$
4. $\log_a a = 1$.

Demonstração. Os resultados acima seguem da definição de logaritmo. Vamos mostrar a propriedade (2), ficando a cargo do leitor as demais demonstrações. Vamos denotar $e = \log_a b$. Temos então que $a^e = b$. Logo, elevando ambos os termos a potência c, temos que $(a^e)^c = b^c$, ou seja, $a^{ce} = b^c$. Logo $ce = \log_a b^c$, ou seja, $c \log_a b = \log_a b^c$. □

Exercício 3.24

Usando as propriedades básicas de logaritmo, simplifique as seguintes expressões:

1. $\log_3 27^3 =$
2. $\log_4 165^5 =$
3. $\log_{1/2} 4^2 =$
4. $\log_2(2\sqrt{2}) =$

Exercício 3.25

Verifique que $\log_3 3^2 = \log_\pi \pi^2 = 2$.

Para as operações de multiplicação e divisão dentro de um logaritmo, temos as seguintes propriedades:

Teorema 91. *Sejam a, b, c reais positivos, com $a \neq 1$. Então:*

1. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$.
2. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$, *se* $c \neq 0$.

Demonstração. Vamos demonstrar (1), ficando a cargo do leitor a conclusão de (2) usando (1).

Vamos denotar $e = \log_a b$ e $f = \log_a c$. Então $a^e = b$ e $a^f = c$. Assim $a^e a^f = bc$, ou seja, $a^{e+f} = bc$, donde concluímos que $e + f = \log_a bc$, ou seja $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$. □

Exercício 3.26

Calcule

1. $\log_2(8 \cdot 16 \cdot 64) =$
2. $\log_3 \frac{27}{81} =$
3. $\log_4 2 + \log_4 8 =$
4. $\log_6 3 + \log_6 2 =$
5. $\log_2 12 - \log_2 3 =$

Em muitas situações onde necessitamos calcular o logaritmo, ou seja, encontrar numericamente o valor, podemos recorrer ao uso das calculadoras. Geralmente, as calculadoras comuns possuem teclas para o calculo de logaritmos em duas bases: Na base 10 e na base e, onde e é o número de Euler, com valor aproximado $e \sim 2,71828....$

Normalmente, nas calculadoras o logaritmo na base 10 é representada pela tecla com símbolo log e na base e é geralmente representada pelo símbolo ln. Como sugestão, usando uma calculadora, calcule $\log 100$. O valor retornado deve ser 2.

Sabendo que a calculadora fornece resultados de logaritmos na base 10 e na base e, como podemos calcular o logaritmo em outras bases, por exemplo, como calcular $\log_2 5$?

A resposta a essa pergunta depende do seguinte resultado, conhecido como mudança de base no logaritmo:

Dados duas bases a e b e um número positivo c, a relação entre $\log_a c$ e $\log_b c$ é dada pela expressão

$$\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$$

Observe que a expressão acima nos permite calcular o logaritmo em qualquer base, dado que conhecemos o logaritmo em alguma base. Como podemos usar a calculadora para calcular logaritmos na base 10, então podemos calcular o logaritmo em qualquer base.

Exemplo 92. *Com o auxilio da calculadora, vamos calcular* $\log_2 5$. *Para isso, vamos realizar as seguintes etapas:*

1. *Calcular* $\log_{10} 5$ *na calculadora. O valor obtido é* $0,698970004$.

2. *Calcular* $\log_{10} 2$ *na calculadora. O valor obtido é* $0,301029996$.

3. *Pela expressão da mudança de base, concluímos que*

$$\log_2 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} = \frac{0,698970004}{0,301029996} = 2,321928095$$

Exercício 3.27

Com o auxílio de uma calculadora, encontre os valores numéricos dos logaritmos abaixo:

1. $\log_2 7 =$

2. $\log_{0.5} 3 =$

3. $\log_3 11 =$

4. $\log_9 2 =$

5. $\log_7 23 =$

3.8.2 Função Logarítmica

Uma função logarítmica é uma função da forma $f(x) = \log_a x$, onde a é um real positivo tal que $a \neq 1$. Como estamos usando a operação de logaritmo, o maior domínio em que a função pode ser definida é o conjunto dos reais positivos.

Como no caso das funções exponenciais, vamos realizar um esboço do gráfico de uma função logarítmica através de algumas observações em relação ao comportamento da função:

Considere uma função logarítmica $f(x) = \log_a x$.

1. Do fato de que $\log_a a^b = b \log_a a = b$ para todo real b, concluímos que a função f é sobrejetora. Assim, a imagem da função f é $\mathbb{R}$.

2. Se $a > 1$, temos que $\log_a x < \log_a y$ se $x < y$, ou seja, f é uma crescente. Por outro lado, se $0 < a < 1$, então $\log_a x > \log_a y$ se $x < y$, ou seja, f é uma função decrescente.

3. $f(1) = \log_a 1 = 0$. Assim, o gráfico da função logaritmo sempre encontra o eixo das abcissas no ponto $(1, 0)$.

4. $f(a) = \log_a a = 1$. Assim, o ponto $(a, 1)$ sempre pertence ao gráfico da função logarítmica.

Exemplo 93. *Vamos fazer um esboço do gráfico da função $f(x) = \log_2 x$. Observe que a base é maior que 1, logo a função é crescente. Assim, para valores cada vez maiores de x, obtemos imagens $f(x)$ cada vez maiores. Como observado acima, o gráfico da função deve conter os pontos $(1, 0)$ e $(2, 1)$. O gráfico da função é mostrado na Figura 3.22*

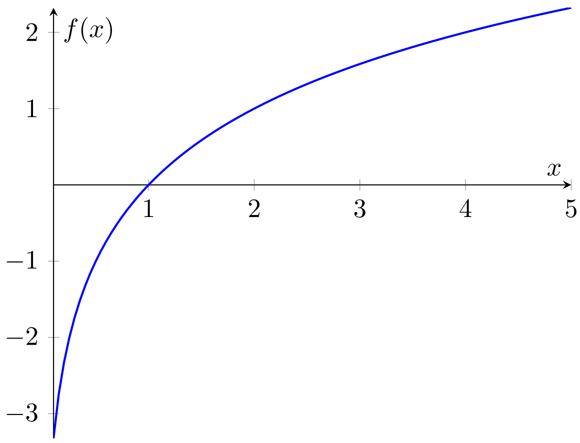


Figura 3.22: Gráfico da Função $f(x) = \log_2 x$

Exemplo 94. *A Figura 3.23 exibe o gráfico da função $f(x) = \log_{0.5} x$.*

De um modo geral, temos as seguintes configurações para o gráfico de uma função logarítmica: Suponha $f(x) = \log_a x$. Então o gráfico de f é de uma das formas como apresentado na Figura 3.24.

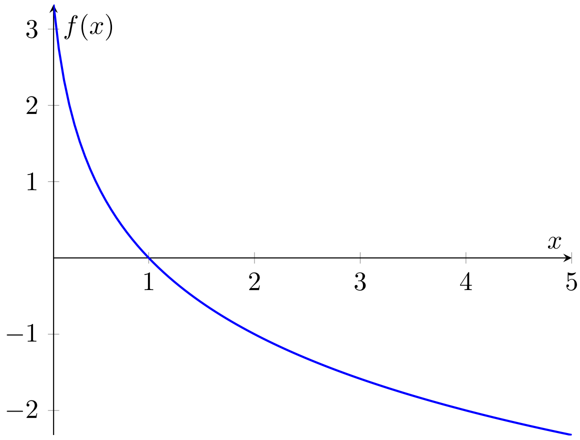


Figura 3.23: Gráfico da Função $f(x) = \log_{0.5} x$

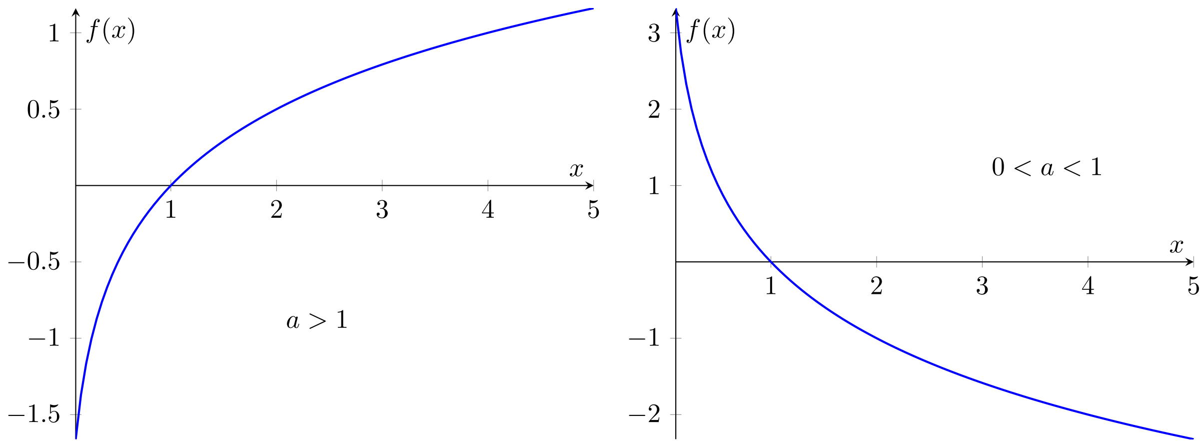


Figura 3.24: Gráfico da Função $f(x) = \log_a x$, para $a > 1$ (esquerda) e $0 < a < 1$ (direita)

Exercício 3.28

Faça um esboço do gráfico das seguintes funções:

1. $f(x) = \log_3 x$
2. $f(x) = \log_{\sqrt{2}} x$
3. $f(x) = \log_{0.1} x$
4. $f(x) = \log_{\frac{3}{4}} x$
5. $f(x) = \log_7 x$

3.8.3 Exercícios

1. Calcule:

   (a) $\log_2 16 =$

   (b) $\log 2\frac{1}{4} =$

   (c) $\log_5 5 =$

   (d) $\log_4 1 =$

   (e) $\log_2 \sqrt{2} =$

2. Simplifique:

    (a) $\log_3 27^3 =$

    (b) $\log_4 165^5 =$

    (c) $\log_{1/2} 4^2 =$

    (d) $\log_2(2\sqrt{2}) =$

3. Verifique que $\log_3 3^2 = \log_\pi \pi^2 = 2$.

4. Calcule

    (a) $\log_2(8 \cdot 16 \cdot 64) =$

    (b) $\log_3 \frac{27}{81} =$

    (c) $\log_4 2 + \log_4 8 =$

    (d) $\log_6 3 + \log_6 2 =$

    (e) $\log_2 12 - \log_2 3 =$

5. Com o auxílio de uma calculadora, encontre os valores numéricos dos logaritmos abaixo:

    (a) $\log_2 7 =$

    (b) $\log_{0.5} 3 =$

    (c) $\log_3 11 =$

    (d) $\log_9 2 =$

    (e) $\log_7 23 =$

6. Faça um esboço do gráfico das seguintes funções:

    (a) $f(x) = \log_3 x$

    (b) $f(x) = \log_{\sqrt{2}} x$

    (c) $f(x) = \log_{0.1} x$

    (d) $f(x) = \log_{\frac{3}{4}} x$

    (e) $f(x) = \log_7 x$

3.9 Funções Trigonométricas

Nesta seção, vamos estudar as funções trigonométricas. Mais especificamente, as funções $sen(x), cos(x)$ e $tan(x)$. Para isso, necessitamos fazer uma breve revisão de trigonometria.

3.9.1 Circulo trigonométrico

Vamos relembrar as definições de seno, cosseno e tangente. Considere o seguinte triângulo retângulo:

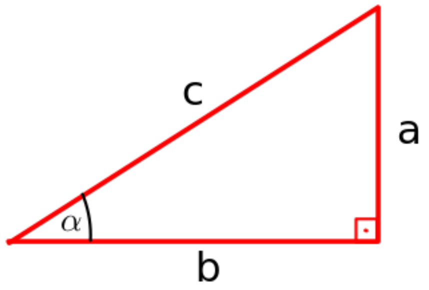


Figura 3.25: Triângulo Retângulo

Temos as seguintes definições:

1. Seno do ângulo α: $sen(\alpha) = \frac{a}{c}$.
2. Cosseno do ângulo α: $cos(\alpha) = \frac{b}{c}$.
3. Tangente do ângulo α: $tan(\alpha) = \frac{a}{b}$

Do Teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2$ obtemos a seguinte relação

$$sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

ou seja,

$$sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$$

que é válida para qualquer ângulo α. Essa igualdade é denominada de relação fundamental da trigonometria.

Exercício 3.29

Em um triângulo retângulo, a tangente de um de seus ângulos agudos é 2. Sabendo-se que a hipotenusa desse triângulo é 5, o valor do seno desse mesmo ângulo é?

a) 2

b) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

c) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{5}$

e) $\frac{3\sqrt{5}}{3}$

Exercício 3.30

Utilize a Figura 3.25 para provar que $tan(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$

Observação 95. *Graus e Radianos*

Por convenção, utilizamos radianos para medida de ângulos. Como exemplo, quando calculamos $sen(\pi)$*, estamos pensando no seno do ângulo de* π ***radianos****, e não* π *graus.*

Para trabalhar com radianos e graus, basta lembrar que π *radianos é igual a 180º, e usar regra de três simples.*

Exercício 3.31

Qual o valor de 360º em radianos?

Exercício 3.32

Quanto vale $\frac{\pi}{2}$ radianos em graus?

Exercício 3.33

Com o auxílio de uma calculadora, calcule o valor $cos(\pi)$.

Para entendermos melhor algumas propriedades das funções trigonométricas, é interessante considerar o círculo trigonométrico (Figura 3.26).

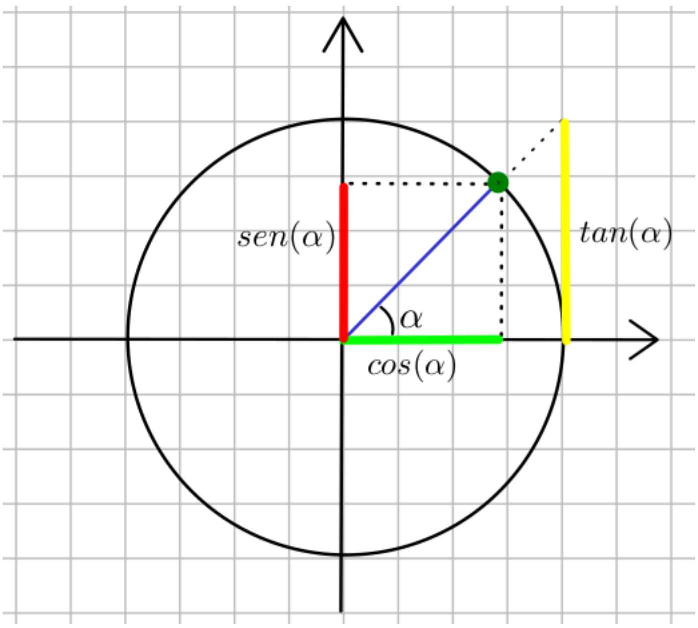


Figura 3.26: Círculo Trigonométrico

O Círculo trigonométrico é um círculo de raio 1. Para cada valor de α, imaginamos um ponto (em verde escuro) de tal forma que o raio da circunferência forma um ângulo exatamente igual a α em relação ao eixo das abcissas. Para valores positivos de α, o ponto se move no sentido anti-horário, enquanto para valores de α negativo, o ponto se move no sentido horário.

Usando as relações trigonométricas no triângulo retângulo que tem hipotenusa dado pelo raio azul, vemos que, dado o angulo α, então $sen(\alpha)$ corresponde ao cateto oposto ao ângulo (segmento vermelho), enquanto $cos(\alpha)$ corresponde ao cateto adjacente (segmento em verde). Ou seja, $sen(\alpha)$ corresponde a altura do ponto verde escuro, enquanto $cos(\alpha)$ é a distância na horizontal. Por fim, $tan(\alpha)$ corresponde ao segmento de reta em amarelo.

3.9.2 Funções Seno, Cosseno e Tangente

Vamos utilizar a representação do Círculo trigonométrico para obter algumas propriedades das funções trigonométricas. Começamos com a função seno:

A função seno $f(\alpha) = sen(\alpha)$.

1. Domínio: Reta real $\mathbb{R}$. Observe que podemos calcular o seno de qualquer ângulo.

2. Imagem: Entre -1 e 1. Como discutido acima, o seno de um ângulo α corresponde a altura do ponto verde escuro na circunferência de raio 1 (ver Figura 3.26). Logo, pode variar de -1 (caso em que o ponto verde escuro esta no ponto mais baixo, que corresponde ao ângulo de $\frac{3\pi}{2}$) até 1 (caso em que o ponto verde escuro esta no ponto mais alto, que corresponde ao ângulo de $\frac{\pi}{2}$).

   A Figura 3.27 mostra o gráfico da função $sen(\alpha)$.

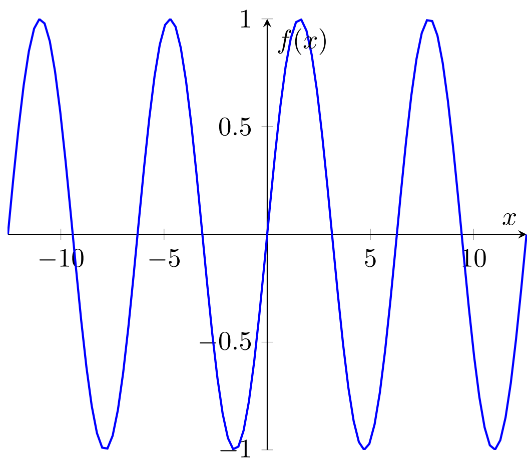


Figura 3.27: Gráfico da Função Seno

Observe que, quando o ponto verde escuro da Figura 3.26 completa uma volta, ou seja, o valor de α é maior que 2π, os valores de $sen(\alpha)$ começam se repetir. Dizemos nesse caso que a função seno é periódica:

Definição 3.16

Dizemos que uma função $f(x)$ é periódica se existe um número positivo p tal que

$$f(x+p) = f(x)$$

para todo x.

A função seno satisfaz

$$sen(\alpha + 2\pi) = sen(\alpha)$$

para todo α. Logo, a função seno é periódica, de período 2π.

A função cosseno $f(x) = cos(x)$.

1. Domínio: Reta real $\mathbb{R}$.

2. Imagem: Entre -1 e 1.

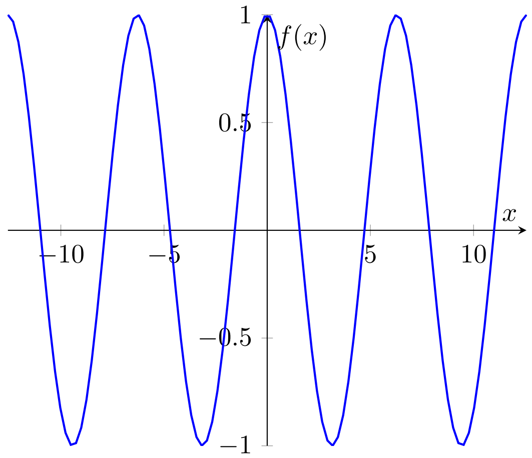


Figura 3.28: Gráfico da Função Cosseno

Exercício 3.34

Na Figura 3.29, indique qual é o gráfico da função $sen(\alpha)$ e qual é o gráfico da função $cos(\alpha)$. (Dica: Neste caso, basta verificar qual o valor de $sen(0)$ e $cos(0)$).

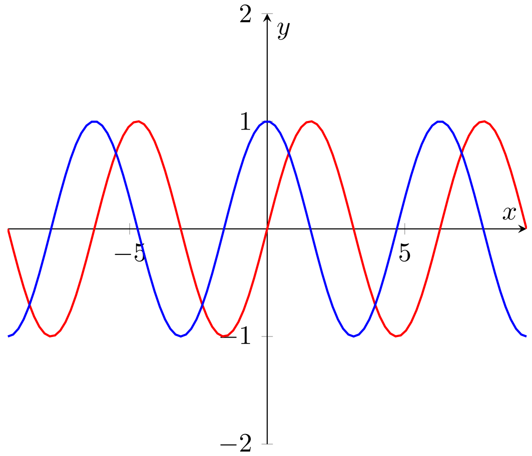


Figura 3.29: Funções Seno e Cosseno

Observando a Figura 3.29, notamos que os gráficos das funções Seno e Cosseno são semelhantes, a menos de um deslocamento. Essa propriedade pode também ser observada no Círculo trigonométrico, apresentado na Figura 3.30.

Pela Figura 3.30, observamos que

$$sen(\alpha) = \frac{a}{c} = cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$$

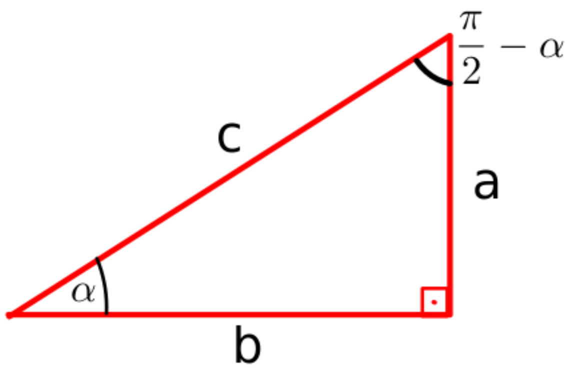


Figura 3.30: Diferença das Funções Seno e Cosseno

Definição 3.17

Dizemos que uma função $f(x)$ é:

1. **Par**, se $f(-x) = f(x)$ para todo x
2. **Impar**, se $f(-x) = -f(x)$ para todo x.

Na Figura 3.31, representamos o ângulo α e o ângulo $-\alpha$. Observe que, o $sen(\alpha)$ e o $sen(-\alpha)$ são invertidos, enquanto o $cos(\alpha)$ e $cos(-\alpha)$ são exatamente iguais. Concluímos assim que

- A função $sen(x)$ é impar;
- A função $cos(x)$ é par.

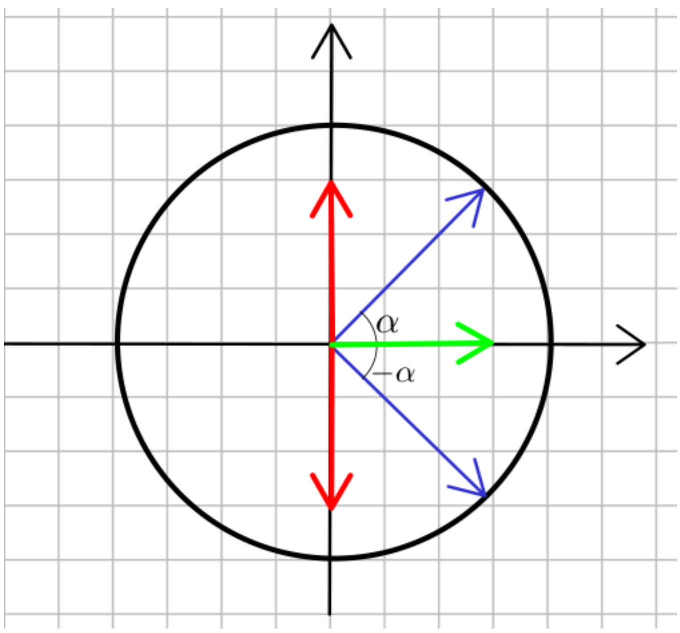


Figura 3.31: Paridade das Funções

Concluímos essa seção com a função tangente:

A função tangente $f(x) = tan(x)$.

1. Domínio: Observe que $tan(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$. Logo, não podemos calcular $tan(\alpha)$ para os ângulos α que anulam o cosseno. Assim, o domínio de definição da função tangente é $\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{N}\}$.

2. Imagem: $\mathbb{R}$

A Figura 3.32 representa o gráfico da função tangente.

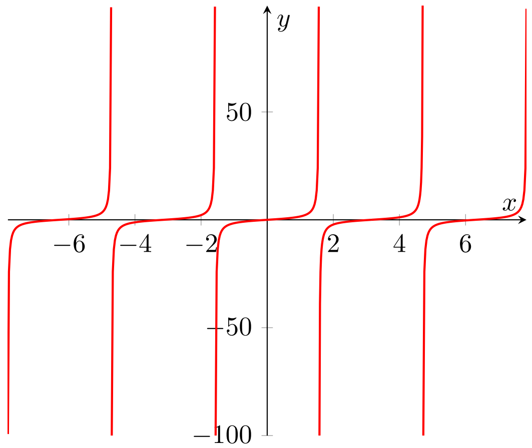


Figura 3.32: Gráfico da Função Tangente

Exercício 3.35

1. A função $tan(x)$ é par ou impar?

2. A função $tan(x)$ é periódica?

3.9.3 Exercícios

1. Resolva a equação trigonométrica $\sin(x) = \frac{1}{2}$ no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$.

2. Prove que $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ para qualquer valor de x.

3. Encontre o valor de θ no intervalo $0° \leq \theta < 360°$ que satisfaça a equação $\tan(\theta) = 1$.

4. Se $\tan(x) = \frac{3}{4}$ e x está no primeiro quadrante, encontre $\sin(x)$ e $\cos(x)$.

5. Determine o período e a amplitude da função $f(x) = 3\sin(2x)$.

6. Resolva a equação $\cos(2x) = 0$ no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$.

7. Encontre todos os valores de x que satisfaçam a equação $\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$.

8. Faça um esboço da função $f(x) = 3sen(x)$.

9. Faça um esboço da função $f(x) = 2cos(x/2)$.

10. Faça um esboço da função $f(x) = xsen(x)$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] P. Boulos. *Introdução ao Cálculo - Vol. 1: Cálculo Diferencial.* BLUCHER, 2020.

[2] P. Boulos and P. Camargo. *Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial.* Atual Editora, São Paulo, 3rd edition, 2006.

[3] L. R. Dante. *Matemática: Contextos e Aplicações, Vol. 1.* Ática, São Paulo, 2016.

[4] H. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo - Vol. 1.* LTC, 2018.

[5] P. R. Halmos. *Naive Set Theory.* Van Nostrand, New York, 1960.

[6] F. Iezzi, Gelson e Dolce. *Fundamentos de Matemática Elementar, Vol. 1: Conjuntos e Funções.* Editora Atual, São Paulo, 2008.

[7] IMPA. *Livro Aberto de Matemática.* IMPA, 2020.

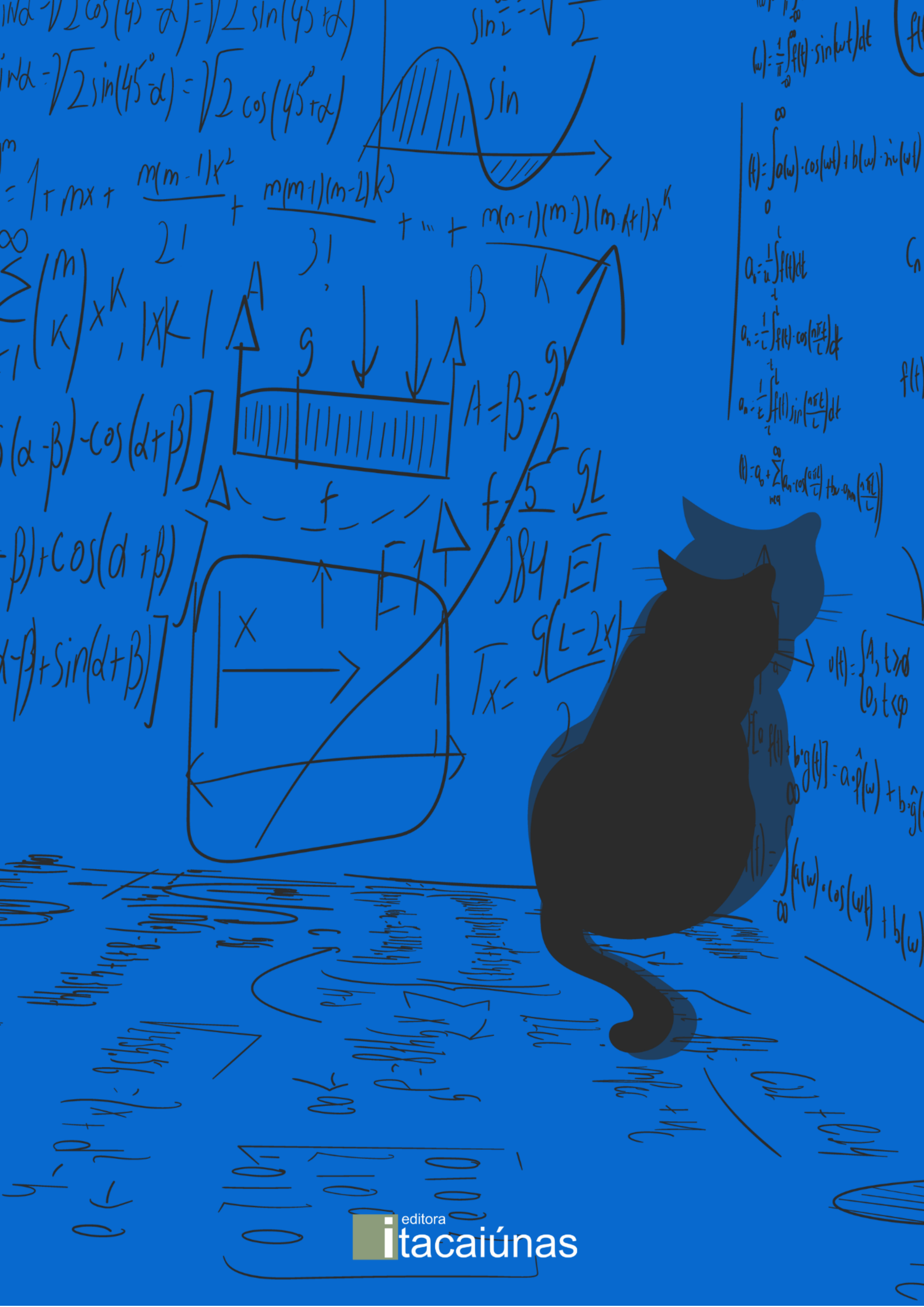
[8] E. L. Lima. *Curso de Análise, Vol. 1: Funções de uma Variável.* IMPA, Rio de Janeiro, 1999.

[9] F. Milies and S. Coelho. *Números: uma introdução à matemática.* EDUSP, 2001.

[10] K. C. S. Smole and M. I. Diniz. *Matemática: Ensino Médio, Vol. 1.* Saraiva Educação, São Paulo, 2015.

[11] J. Stewart, D. Clegg, and S. Watson. *Cálculo - Volume 1.* Cengage Learning, 6ª edição brasileira, 9ª edição norte-americana edition, 2022.

ÍNDICE REMISSIVO



editora itacaiúnas